

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JANILEIDE VIEIRA GOMES

CAOS EM BAIXA DIMENSÃO NA INTERAÇÃO ONDA-PARTÍCULA EM
PLASMA FRIO VIA DINÂMICA HAMILTONIANA CLÁSSICA

CURITIBA

2021

JANILEIDE VIEIRA GOMES

CAOS EM BAIXA DIMENSÃO NA INTERAÇÃO ONDA-PARTÍCULA EM
PLASMA FRIO VIA DINÂMICA HAMILTONIANA CLÁSSICA¹

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA

2021

¹Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

G633c

Gomes, Janileide Vieira

Caos em baixa dimensão na interação onda-partícula em plasma frio via dinâmica hamiltoniana clássica [recurso eletrônico] / Janileide Vieira Gomes. – Curitiba, 2021.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

Orientador: Ricardo Luiz Viana

1. Física de plasmas. 2. Dualidade onda-partícula. 3. Dinâmica Hamiltoniana clássica. I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 530.44

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **JANILEIDE VIEIRA GOMES** intitulada: **"Caos em baixa dimensão na interação onda-partícula em plasma frio via dinâmica Hamiltoniana clássica"**, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 22 de Julho de 2021.

Assinatura Eletrônica
22/07/2021 17:44:30.0
RICARDO LUIZ VIANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
22/07/2021 17:42:11.0
IBERÊ LUIZ CALDAS
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
23/07/2021 14:16:42.0
MARISA ROBERTO
Avaliador Externo (INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA)

Assinatura Eletrônica
23/07/2021 12:05:02.0
TARCISIO MARCIANO DA ROCHA FILHO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA)

Assinatura Eletrônica
22/07/2021 17:51:50.0
LUIZ FERNANDO ZIEBELL
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL)

“ A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê”

ARTHUR SCHOPENHAUER

À todos os professores e professoras, que contribuíram para minha formação.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço, enormemente, ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana, pela oportunidade e por todo conhecimento compartilhado comigo na elaboração desta tese.

Ao Prof. Dr. Yves Elskens por ter me recebido em sua equipe na Universidade de Aix-Marseille, França. Foi uma grande oportunidade elaborar esta tese com suas generosas contribuições.

Ao Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, pela colaboração e enriquecedoras sugestões neste trabalho.

À Dra. Meirielen Caetano de Sousa, pela paciência e ensinamentos sobre sistemas dinâmicos, bem como, por suas valiosas contribuições nesta tese. Agradeço ainda por sua amizade e pelos momentos de descontração enquanto estávamos em Marseille.

À minha irmã, pelo suporte emocional em todos os bons e maus momentos. Obrigada por sua fiel amizade, apoio e incentivo ao longo de todos esses anos.

À minha mãe, por me apoiar e estar sempre de braços e coração abertos em todos os momentos que necessito de amparo. Serei eternamente grata, pelo exemplo de mulher guerreira e pelos princípios que me ensinou.

Ao meu pai e meus irmãos, por sempre me apoiarem e por compreenderem minha ausência em todos os momentos que não pude estar presente.

Ao meu amigo e companheiro, Karlisson Rodrigo de Almeida Sousa, pela paciência, troca de experiências e por todos os momentos que compartilhamos ao longo desses anos de convivência.

À Adriane da Silva Reis, por sua amizade e pelos momentos de descontração, *fitness* e alcoólicos que compartilhamos ao longo destes quatro anos.

À todos da equipe e aos funcionários administrativos do Laboratório de Física das Interações Iônicas e Moleculares da Universidade de Aix-Marseille, pela receptividade durante minha estadia em Marseille.

Ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Física da UFRP, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivada pela acendrada confiança no mérito aqui presente.

Ao CNPq e CAPES pelas bolsas de estudo concedidas e pelo auxílio financeiro para participação em reuniões científicas.

Por fim, agradeço imensamente a todos os professores e professoras, que me proporcionaram o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação ao longo da minha formação profissional. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

RESUMO

A interação onda-partícula é um dos fenômenos característicos que ocorre naturalmente em física de plasma e desempenha um papel imprescindível na dinâmica desses sistemas físicos. Os processos decorrentes dessa interação são, essencialmente, não lineares e estão diretamente relacionados ao surgimento de instabilidades e turbulências em plasma devido a amplificação e/ou amortecimento das ondas, bem como, aceleração e/ou desaceleração de partículas. Nesse sentido, a abordagem Hamiltoniana tem se destacado como uma ferramenta bastante eficaz na descrição desse tipo de interação, onde a dinâmica, no espaço de fase, é representada tanto por trajetórias regulares quanto caóticas. Em geral, a predominância do tipo de trajetórias depende, principalmente, da amplitude da perturbação no sistema, que influencia diretamente o movimento das partículas. De forma geral, regiões onde prevalecem trajetórias regulares são favoráveis à aceleração coerente de partículas enquanto que regiões caóticas estão associadas ao aquecimento e escape de partículas. Frequentemente, a dinâmica de sistemas caóticos com muitos graus de liberdade pode ser estudada através de aproximações em baixa dimensão. Assim, o movimento caótico surge conforme aumenta-se o número de graus de liberdade no sistema. Neste trabalho analisamos os aspectos não lineares da interação onda-partícula em baixa dimensão utilizando dinâmica Hamiltoniana clássica no modelo de aproximação de uma única onda. Na aproximação de uma única onda considera-se que a instabilidade ocorre ao longo do modo mais instável, de forma que, os demais modos intensificados na interação podem ser negligenciados pela condição de contorno. Iniciamos nossas análises com o caso mais simples: com uma partícula, $N = 1$. Esse caso é completamente integrável, de forma que, a dinâmica no espaço de fase é representada apenas por trajetórias regulares. Discutimos, qualitativamente, e através de cálculos numéricos computacionais, o valor do momento linear total, P , associado a uma bifurcação no sistema, bem como, um valor especial de P , para o qual a trajetória cuja intensidade da onda na condição inicial é zero, passa, assintoticamente, pelo ponto hiperbólico do sistema. Para o caso com $N = 2$, a dinâmica do fluxo total é representada através do método da seção de Poincaré. Nossas análises mostram que a intensificação de caos ocorre tanto na região da separatriz (como esperado), quanto na região próxima ao ponto fixo elíptico (atípico para sistema onda-partícula). Destacamos ainda que, para esse caso, a dinâmica caótica está associada à alta sensibilidade na condição inicial da velocidade relativa das partículas.

Palavras-Chave: Interação onda-partícula, Dinâmica Hamiltoniana clássica, Caos em sistemas Hamiltonianos, Física de plasmas

ABSTRACT

The wave-particle interaction is one of the characteristic phenomena that occurs naturally in plasma physics and plays an essential role in their dynamics. The processes resulting from this interaction are essentially nonlinear and are directly related to the appearance of instabilities and turbulence in plasma due to the amplification and/or damping of the waves, as well as, acceleration and/or deceleration of particles. The Hamiltonian approach is a very effective tool in the description of this type of interaction, such that, in the phase space, the dynamics of the motion can be represented by both regular and chaotic trajectories. The predominance of the type of trajectories depends, mainly, on the amplitude of the disturbance in the system that directly influences the particle's motion. In general, regions where regular trajectories prevail are favorable for coherent particle acceleration, while chaotic regions are associated with particle heating and escape. Often the dynamics of chaotic systems with many degrees of freedom can be studied through approaches in low dimension. Thus chaotic motion arises as we increase the number of degrees of freedom in the system. In this work we analyze the nonlinear aspects of the wave-particle interaction in low dimension using classic Hamiltonian dynamics and considering the single wave model. In the single wave model instability is considered to occur along the most unstable mode, so that, the other modes intensified in the interaction can be neglected by the boundary condition. We started our analysis with the simplest case with a particle $N = 1$. This case is completely integrable, so that, the dynamics in the phase portrait are represented only by regular trajectories. We discussed, qualitatively and with numerical computations the value of the total linear moment, P , associated with a bifurcation in the system, as well as a special value of P , for which the trajectory whose wave intensity in the initial condition is zero passes asymptotically through the hyperbolic fixed point. For the case with $N = 2$, the dynamics of the total flow interaction is represented using the Poincaré section method. Our analysis show that chaos intensification occurs both in the separator region (as expected) and in the region close to the fixed elliptical point (atypical for the wave-particle system). We also highlight that, for this case, chaotic dynamics is associated with high sensitivity in the initial condition of the relative velocity of the particles.

Keywords: Wave-particle interaction, Classic Hamiltonian dynamics, Chaos in a Hamiltonians systems, Plasma physics

LISTA DE FIGURAS

- 1.1 - Representação esquemática da transição entre os estados sólido, líquido, gasoso e plasma, conforme aumenta-se a energia térmica no sistema. No estado de plasma as ligações que mantinham os elétrons unidos aos núcleos são rompidas, tal que, de forma simplificada, o plasma pode ser classificado como um gás ionizado, eletricamente neutro, formado por elétrons e núcleos dissociados. Figura adaptada da referência [6]. 20
- 1.2 - Amplificação (esquemática) de ondas de Langmuir em (a) um plasma quase neutro em equilíbrio estacionário. Os pontos verdes representam os íons e os vermelhos os elétrons. (b) Um pequeno deslocamento na distribuição local dos elétrons dá origem a uma força elétrica restauradora que, por sua vez está associada à intensificação de uma oscilação de Langmuir (c) que, pode interagir com os elétrons ressonantes (d), enquanto que os íons atuam apenas como um fundo neutralizador de cargas. Figura adaptada da referência [10]. 22
- 1.3 - Localização dos polos no plano complexo e caminho de integração seguindo o contorno de Landau. (a) polo localizado na parte imaginária positiva do plano complexo indica amplificação das ondas; (b) polo exatamente no caminho da integral indica que as ondas se propagam no plasma com ω real; (c) polo localizado na parte imaginária negativa do plano complexo indica amortecimento das ondas no plasma. Figura adaptada da referência [4]. 24
- 1.4 - Representação da região de ressonância para uma função de distribuição de velocidades do tipo Maxwelliana. A área azulada sob a curva indica que, para esse tipo de distribuição, existe mais partículas com velocidades ligeiramente menores que a velocidade da onda, ω/k , e, portanto, ganham energia da onda na interação. Consequentemente, a onda é atenuada. A área rosada sob a curva, representa partículas cujas velocidades são, ligeiramente, maiores do que a da onda. (b) A saturação na troca de energia onda-partícula é caracterizada pela formação de um platô, representado pela linha azul pontilhada, limitado à região de ressonância. Figura adaptada da referência [23] 25

1.5 - Representação da região de ressonância para função de distribuição de velocidades de um sistema feixe-plasma. (a) O feixe está representado pelo pico com menor distribuição de elétrons adicionado à cauda da função de distribuição do plasma ambiente (pico maior). A área azulada sob a curva indica as partículas com velocidades, ligeiramente, menores que a velocidade da onda, enquanto que a área rosada, representa partículas com velocidades, ligeiramente, maiores que, cedem energia para as ondas na interação. A amplificação das ondas, ocasiona o surgimento das instabilidades feixe-plasma. (b) A saturação na troca de energia onda-partícula é caracterizada pela formação de um platô, entre a função de distribuição do plasma ambiente e do feixe, representado pela linha azul pontilhada. Figura adaptada da referência [23]	25
2.1 - Movimentos de (a) libração e (b) rotação no espaço de fase (q_i, p_i) . Figura proveniente da referência [54].	40
2.2 - Representação esquemática do movimento de um pêndulo simples no espaço (θ, p_θ) . As curvas verdes representam um movimento de libração, as curvas vermelhas representam um movimento de rotação e a curva azul corresponde a separatriz do sistema, que separa os casos de libração e rotação. Figura proveniente da referência [58].	41
2.3 - Representação esquemática do movimento sobre um toro invariante bi-dimensional, $n = 2$. Figura proveniente da referência [54].	46
2.4 - Espaço de fase de um pêndulo não linear. O ponto O, destacado em azul representa o ponto fixo elíptico e os pontos em vermelho, A e B, representam os pontos fixos hiperbólicos. As linhas com as marcações W^s e W^u correspondem as variedades estáveis e instáveis do ponto hiperbólico, respectivamente.	51
2.5 - Representação (a) de um ponto homoclínico O, formado pelo cruzamento das variedades estáveis $W^s(\gamma)$ e instáveis $W^u(\gamma)$ de um ponto fixo hiperbólico γ . (b) ponto heteroclínico definido através do cruzamento das variedades estáveis $W^s(\gamma_1)$, $W^s(\gamma_2)$ e instáveis $W^u(\gamma_1)$, $W^u(\gamma_2)$ de dois pontos fixos hiperbólicos, γ_1 e γ_2 . Figura adaptada da referência [57]	52
2.6 - Emaranhamento homoclínico devido a elongação e esticamento das variedades estáveis e instáveis [57].	53

- 3.1 - (a) potencial multiperiódico $V(q)$ com amplitude $A \bmod 2\pi$. As linhas vermelha, magenta e azul mostram os níveis de energia total, H , em relação à amplitude A do potencial. (b) retrato de fase (q,p) mostrando os tipos de trajetórias de acordo com a variação de H . A separatriz (trajetória magenta) separa os tipos de movimento no espaço de fase. O valor de H da separatriz está indicado pela linha magenta em (a). As trajetórias em azul, que ocorrem no regime de H especificado na linha azul em (a), mostra que o movimento é limitado a uma região do espaço de fase que coincide com “largura da” separatriz. As trajetórias vermelhas mostram que além da separatriz, no regime de H mostrado na linha vermelha em (a), o sistema descreve um movimento quase balístico (ou partícula livre). 62
- 3.2 - Largura da ressonância Δ_R , delimitada pela separatriz. As trajetórias abertas representam o movimento de partícula livre, ou seja, de partículas que não estão em ressonância com a onda, enquanto que as trajetórias elípticas, limitadas pela separatriz, representam o movimento de partículas que estão em ressonância com a onda, aprisionadas ao potencial estável da onda. 64
- 5.1 - (a) Diagrama de bifurcação a partir da Equação (5.10). A linha azul (contínua) corresponde ao ponto fixo elíptico estável $y_1^* = 0$. O ponto em preto em $I_{2,3}^* = 1/2$ e $P = 3/2$ corresponde à bifurcação, e as linhas vermelha (pontilhada) e verde (dupla pontilhada) correspondem, respectivamente, aos pontos fixos hiperbólicos e elípticos em $y_{2,3}^* = \pi$ após a bifurcação. Em (b) mostramos as raízes da equação (5.10), normalizada, $(1 - I/P)^2 I/P = 1/(2P^3)$ que, complementa assiduamente, a descrição das mudanças topológicas no espaço de fase deste sistema. 76
- 5.2 - Curvas, parametricamente, no plano (P,H) calculadas a partir das Equações (5.15). A linha contínua azul representa a solução estável no ponto fixo $y_1^* = 0$. As curvas vermelha e verde correspondem as soluções de equilíbrio nos pontos fixos hiperbólico e elíptico em $y_{2,3}^* = \pi$, após a bifurcação, a qual ocorre em $(P,H) = (3/2, 3/2)$ com $p_{2,3}^* = 1$ e está representada pelo ponto preto na figura. 78
- 5.3 - Representação da dinâmica no espaço de fase da partícula para o caso com $N = 1$. Os painéis (a) e (b) mostram a topologia do espaço de fase para $P < 3/2$ (antes da bifurcação). Painel (c) mostra o valor de $P = 3/2$, para o qual o sistema apresenta uma bifurcação do tipo sela-centro. O painel (e) mostra a dinâmica para um valor especial do parâmetro $P = 3/4^{1/3}$, para o qual, a trajetória que contém $I = 0$ coincide com o ramo superior da separatriz do ponto X, e, o painel (f) mostra a dinâmica após a bifurcação global do sistema. 79
- 6.1 - Representação geométrica de uma seção de Poincaré fixada no espaço de fase original gerado pelas equações diferenciais. Figura proveniente da referência [94]. 84

6.2 - Intercepção das trajetórias na seção Poincaré, localizada em $y_1 - y_2 = 0$, no regime de H negativo.	93
6.3 - A parte superior de cada painel mostra a evolução temporal da amplitude do movimento p_1 (linha azul) e p_2 (linha vermelha) e, a parte inferior a evolução da amplitude total de $p_1 + p_2$. (a) corresponde a evolução em tempo contínuo da trajetória preta na seção 6.2(a), (b) à trajetória verde, (c) a trajetória vermelha e (d) a trajetória azul. Note que a perturbação δ aumenta a partir da trajetória $\delta = 4,9 \times 10^{-3}$ para a trajetória azul $\delta = 0,170$	94
6.4 - Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram as trajetórias preta e azul na seção 6.2(a), respectivamente. Em (a) a transformada de Fourier mostra que o sistema oscila harmonicamente com um único pico de frequência; em (b) observamos o surgimento de um harmônico com o dobro da frequência fundamental, caracterizando o surgimento de uma ressonância no sistema.	95
6.5 - Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram as trajetórias vermelha escura e azul nas seções 6.2(d) e 6.2(e), respectivamente. Observe que apesar da aparência “ruidosa” o pico de frequência ainda é, consideravelmente, bem definido.	95
6.6 - Intercepção de trajetórias com a seção Poincaré localizada em $y_1 - y_2 = 0$ para valores de H positivo.	96
6.7 - Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram a trajetória verde na seção 6.6(b)	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	Dinâmica de sistemas Hamiltonianos	30
2.1	Momentos canônicos e Equações de Hamilton	30
2.2	Hamiltoniana e Energia total	33
2.3	Simetrias e Leis de conservação	34
2.4	Transformações canônicas e Funções geradoras	35
2.5	Constantes de movimento e Teorema de Poisson	37
2.6	Variáveis de Ação e Ângulo	39
2.6.1	Sistemas multiperiódicos	39
2.6.2	Variáveis Ação-Ângulo	41
2.6.3	Frequências fundamentais	42
2.7	Integrabilidade de sistemas Hamiltonianos	44
2.7.1	Toros ressonantes e não ressonantes	47
2.7.2	Teorema KAM	47
2.8	Estabilidade dos pontos de equilíbrio e variedades estáveis e instáveis	48
2.8.1	Emaranhamento homoclínico e dinâmica caótica	51
3	Interação onda-partícula em física de plasma via dinâmica Hamiltoniana	54
3.1	Propriedades gerais de plasmas	54
3.2	Descrição de plasma	57
3.2.1	Descrição de plasma via dinâmica Hamiltoniana clássica	58
3.3	Ressonância onda-partícula: um paradigma da mecânica clássica	60
4	Formalismo Hamiltoniano da interação autoconsistente onda-partícula	66
4.1	Derivação intuitiva da Hamiltoniana para um plasma de elétrons	66
4.2	Forma final da Hamiltoniana autoconsistente onda-partícula	67
4.3	Aproximação para a dinâmica com uma única onda	70
5	Análise da interação para uma onda e uma partícula	72
5.1	Análise preliminar e qualitativa da dinâmica	72
5.2	Análise numérica computacional da dinâmica no espaço de fase da partícula	78
6	Caos em baixa dimensão: sistema com duas partículas	82
6.1	Caos: aspectos gerais	82
6.1.1	Seção de Poincaré	83
6.1.2	Espectro de potência	84
6.2	Hamiltoniana da interação para $N=2$, $M=1$	85
6.3	Definições preliminares para construção da seção de Poincaré	86

6.3.1	Localização da Seção de Poincaré para o sistema com $N=2$	89
6.4	Análise das trajetórias regulares e caóticas na Seção de Poincaré	91
6.4.1	Seção de Poincaré para $H \leq 0$	91
6.4.2	Seção de Poincaré para $H > 0$	96
7	Conclusões e perspectivas	98
	REFERÊNCIAS	101

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

A interação onda-partícula¹ é um dos fenômenos característicos que ocorrem naturalmente em física de plasma e desempenha um papel imprescindível na dinâmica desses sistemas [1]. A amplificação e propagação de ondas em plasmas é um processo natural, devido a característica intrínseca desses sistemas de tentar reestabelecer o equilíbrio na distribuição local de cargas quando o sistema é exposto a perturbações [2]. Essa tentativa de retorno ao equilíbrio pode intensificar uma diversidade de modos oscilatórios com frequências características bem definidas, capazes de propagar-se e interagir com as partículas ressonantes² do plasma [3].

Plasmas são sistemas formados por partículas neutras e carregadas, nos quais, o movimento das partículas pode causar uma concentração local de cargas elétricas positivas e negativas. Tais concentrações de cargas, mesmo em repouso, são fontes de campo elétrico, podendo, assim, interagir simultaneamente com todas as demais partículas do sistema. Isso significa que, os componentes do plasma influenciam diretamente no deslocamento ou movimento das partículas, devido a geração e modificação dos campos eletromagnéticos que, por sua vez, influenciam no movimento de todas as demais partículas. Essa dinâmica particular, presente nos plasmas é caracterizada por um comportamento coletivo e autoconsistente e ocorre mesmo na ausência de campos externos [4,5].

Considerando a energia térmica das partículas, o plasma é considerado como o quarto estado da matéria. A figura 1.1 representa, esquematicamente, a transição entre os estados: sólido, líquido e gasoso devido a dissociação das ligações intermoleculares de um átomo genérico, e o estado de plasma, no qual, as ligações que mantinham os elétrons unidos aos núcleos são rompidas, conforme aumenta-se a anergia térmica no sistema.

Diferentemente dos estados sólidos, líquido e gasoso, nos quais, a transição de fase ocorre a uma temperatura constante para um dado valor de pressão, a transição do estado gasoso para o estado de plasma acontece, proporcionalmente, com o aumento da temperatura do sistema. Não sendo, portanto, uma transição de fase do ponto de vista termodinâmico [5]. Apesar da diferença entre um gás neutro e um plasma se dar devido a presença de partículas carregadas, é importante ressaltar que nem todo gás ionizado pode ser considerado como plasma. Desse modo, para um gás ionizado ser considerado como plasma ele deve obedecer alguns critérios específicos que são chamados *critérios de plasma* [4], como por exemplo, a

¹A interação-onda partícula está presente em vários sistemas físicos, no entanto, nesta tese estamos interessados na interação das ondas de Langmuir, que são ondas eletrostáticas e lineares, com as partículas carregadas (elétrons) em um plasma frio unidimensional.

²Partículas que se deslocam com velocidades próximas a velocidade de fase das ondas.

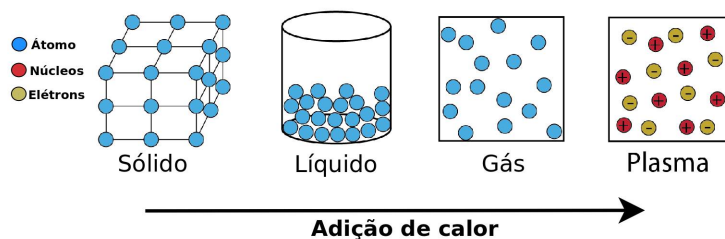


FIGURA 1.1 – Representação esquemática da transição entre os estados sólido, líquido, gasoso e plasma, conforme aumenta-se a energia térmica no sistema. No estado de plasma as ligações que mantinham os elétrons unidos aos núcleos são rompidas, tal que, de forma simplificada, o plasma pode ser classificado como um gás ionizado, eletricamente neutro, formado por elétrons e núcleos dissociados. Figura adaptada da referência [6].

*quase-neutralidade macroscópica e a blindagem de Debye*³.

Outra característica fundamental dos plasmas, diz respeito ao equilíbrio térmico (temperatura) entre suas partículas constituintes. De modo geral, podemos dividir os plasmas em duas principais categorias: *plasma térmico (ou quente)*, quando todas as partículas do plasma (íons, elétrons, espécies neutras) estão em equilíbrio térmico e *plasma não térmico (ou frio)*, quando as espécies de partículas que constituem o plasma podem estar com temperaturas diferentes. [5].

Plasma térmico, são formados em altas pressões e são caracterizados pela presença de partículas leves (elétrons) e pesadas (íons entre outras), com ambas espécies à altas temperaturas e com elevados níveis de ionização. O equilíbrio térmico, nesse caso, implica que os elétrons, íons e partículas neutras possuam mesma temperatura. A alta pressão gasosa, implica em muitas colisões entre partículas, uma vez que, o caminho livre médio das partículas é pequeno. Assim, a troca de energia entre as espécies (via colisões) é eficiente e assegura o equilíbrio termodinâmico⁴ entre as espécies [5].

Já plasma frio, são gerados em baixas pressões, sendo composto, principalmente, por moléculas carregadas e neutras e espécies atômicas, em baixas temperaturas, e por elétrons a altas temperaturas. A baixa pressão, nesse sistema, resulta em poucas colisões entre as partículas, uma vez que, o caminho livre médio é longo. Consequentemente a transferência de energia (via colisões) não é tão eficiente quanto nos plasmas térmicos, ocasionando diferenças de temperatura das espécies, de forma que, as partículas não estão em equilíbrio termodinâmico [5].

³Na seção 3.2.1 reservamos uma descrição mais detalhada acerca das propriedades e dos critérios de plasmas.

⁴Em plasma, o equilíbrio termodinâmico é local, ou seja, as temperaturas de todas as espécies são as mesmas em regiões localizadas do plasma [4].

Assim, em plasma frio, o efeito do campo elétrico autoconsistente no movimento das partículas é muito mais substancial do que o efeito das colisões entre as partículas. Nessas condições, o plasma é denominado, também, como: *plasma não colisional*, uma vez que o tempo de colisões entre as partículas é muito maior comparado às escalas de tempo características do sistema. Consequentemente, nesses sistemas, as ondas, geradas pelo movimento dos elétrons, atuam como o principal mecanismo para a dissipação finita de energia [7, 8]: as partículas são espalhadas pelos campos da onda e sua energia e momento mudam por meio desses processos.

As vibrações coletivas dos elétrons em relação as partículas mais massivas em um plasma frio não colisional, dá origem ao modo de oscilação mais fundamental que consegue se propagar num plasma, denominado: *modo de Langmuir* [3] que, são oscilações longitudinais de natureza eletrostática, independentes do tempo e estacionárias com frequência igual a frequência de plasma [4],

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n q_e^2}{m_e \epsilon_0}, \quad (1.1)$$

onde ω_{pe} é a frequência de plasma, n é a densidade de elétrons, q_e é a carga (individual) do elétron, m_e a massa efetiva de um elétron e ϵ_0 a permissividade elétrica no vácuo⁵. A Figura 1.2 esquematiza a intensificação de uma oscilação de Langmuir em um plasma quase neutro e em equilíbrio, Fig. 1.2(a), formado por íons positivos e elétrons. Um pequeno deslocamento dos elétrons em relação aos íons, Fig. 1.2(b), dá origem a um campo elétrico que atua sobre os elétrons como uma força restauradora. Essa força restauradora, por sua vez, dá origem a uma oscilação sinusoidal estacionária, Fig. 1.2(c), com frequência bem definida, igual a frequência de plasma [10] (Eq. (1.1)). A Figura 1.2(d), mostra a distribuição de elétrons juntamente com a oscilação de Langmuir. Como os íons possuem massa muito maior do que a massa dos elétrons oscilantes, supõe-se que eles formam um fundo uniforme e estacionário que contribui apenas para a neutralidade global de cargas no sistema [4].

A interação das ondas de Langmuir com os elétrons ressonantes em plasma frio não colisional é um fenômeno, essencialmente, não linear e está diretamente relacionado à aceleração coerente (aprisionamento) [11–13] e escape de partículas (difusão caótica) [14], podendo conduzir ao surgimento e intensificação de instabilidades e turbulências em plasmas [15]. Tais fenômenos são observados tanto em plasmas espaciais, como na aceleração supertérmica de elétrons do vento solar na região da magnetosfera terrestre [16], quanto em estudos experimentais para fins tecnológicos, como por exemplo, Laser de elétrons livres (**Free-Electrons-Laser**) [17], tubo de ondas progressivas (**Travelling-Wave-Tube**) [18] entre

⁵A permissividade ou permitividade é uma constante física que descreve como um campo elétrico afeta e é afetado por um meio [9]. A Equação (1.1) está no SI (sistema internacional) de unidades

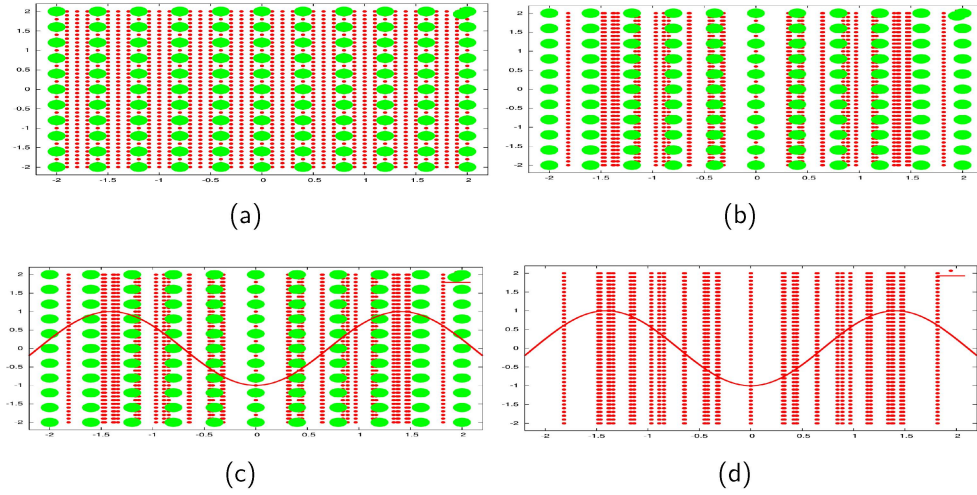


FIGURA 1.2 – Amplificação (esquemática) de ondas de Langmuir em (a) um plasma quase neutro em equilíbrio estacionário. Os pontos verdes representam os íons e os vermelhos os elétrons. (b) Um pequeno deslocamento na distribuição local dos elétrons dá origem a uma força elétrica restauradora que, por sua vez está associada à intensificação de uma oscilação de Langmuir (c) que, pode interagir com os elétrons ressonantes (d), enquanto que os íons atuam apenas como um fundo neutralizador de cargas. Figura adaptada da referência [10].

outros.

Embora a interação autoconsistente onda-partícula seja efetiva quando considera-se partículas ressonantes, é importante atentar-se ainda ao fato de que as velocidades das partículas ressonantes no plasma podem ser diferentes [19]. Assim, a quantidade de partículas com velocidades, ligeiramente, maiores ou menores que a velocidade da onda é determinante para a amplificação ou amortecimento das ondas no plasma [5]. A grosso modo, a troca autoconsistente de energia e momento onda-partícula é caracterizada pelo crescimento e/ou amortecimento de ondas, aquecimento e/ou aceleração, culminando para o surgimento de instabilidades em plasma [15].

A descrição cinética de plasma não colisional pode ser estudada, na abordagem cinética, através da Equação de Vlasov, que é uma variação da equação de Boltzmann desconsiderando o termo colisional,

$$\frac{\partial f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (1.2)$$

onde $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ fornece a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula com massa m_{α} , no entorno da posição \mathbf{r} , com uma velocidade \mathbf{v} , em um certo instante de tempo t , e \mathbf{F} é a força resultante atuando no sistema, dada pela força de Lorentz [4].

No regime linear, a solução simultânea da Equação de Vlasov para um potencial

eletrostático, realizada através de uma transformada de Fourier nas coordenadas e de Laplace no tempo, resulta na função dielétrica das ondas eletrostáticas que, aparece no denominador da equação do potencial, cujas soluções fornecem os modos normais que podem se propagar no plasma.

Nesse sentido, a descrição analítica acerca do amortecimento e amplificação de ondas em plasmas não colisional foi realizada por Landau [20] ao solucionar o problema de integrais com polos que aparecem no denominador da relação de dispersão⁶ [15],

$$D(\mathbf{k}, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0(\mathbf{v})}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} = 0, \quad (1.3)$$

onde, ω_{pe} é a frequência eletrônica do plasma, \mathbf{k} o vetor de onda, ω a frequência angular das ondas e $f_0(\mathbf{v})$ a função de distribuição de velocidades, \mathbf{v} , dos elétrons. Resumidamente, o *método de Landau* consiste em realizar a integração seguindo um caminho no plano complexo que fique à direita do ponto da singularidade do integrando [15]. Nesse procedimento ω possui uma parte real e uma parte imaginária, $\omega = \omega_r + i\omega_{im}$, onde a parte real, determina a frequência do modo de oscilação que consegue se propagar no plasma e a parte imaginária corresponde a taxa temporal de crescimento ou atenuação das ondas [15].

Assim, de acordo com a localização do ponto de singularidade no plano de integração, é possível prever se as ondas serão atenuadas ou amplificadas. A Figura 1.3 mostra as localizações dos polos no plano complexo e o caminho de integração, denominado, *contorno de Landau*. Para o caso em que o polo está localizado na parte imaginária positiva do plano complexo, painel (a), as ondas são amplificadas. Quando o polo está localizado exatamente no caminho de integração, painel (b), a onda se propaga no plasma com frequência real sem interagir com as partículas. E, quando o polo está localizado na parte imaginária negativa do plano complexo, painel (c), as ondas intensificadas no plasma são amortecidas [19]. O amortecimento de ondas em plasma não colisional é, também, chamado de *amortecimento de Landau* [19].

Após a divulgação do método de Landau, passou-se a questionar sobre os mecanismos físicos responsáveis pelas atenuações das ondas na ausência de colisões entre as partículas. Uma abordagem com maior intuição física, explicando o amortecimento das ondas de Langmuir em plasma não colisional, foi elaborada por J. M. Dawson [21] em 1961, onde abordou-se o fenômeno como resultado de um mecanismo ressonante de transferência de energia (e momento) na interação onda-partícula. A comprovação experimental do amortecimento de Landau foi divulgada em 1964, com as observações realizadas por Malmberg e Wharton [22].

⁶As soluções que satisfazem a relação de dispersão (1.3), determinam os modos normais de oscilações que conseguem propagar no plasma.

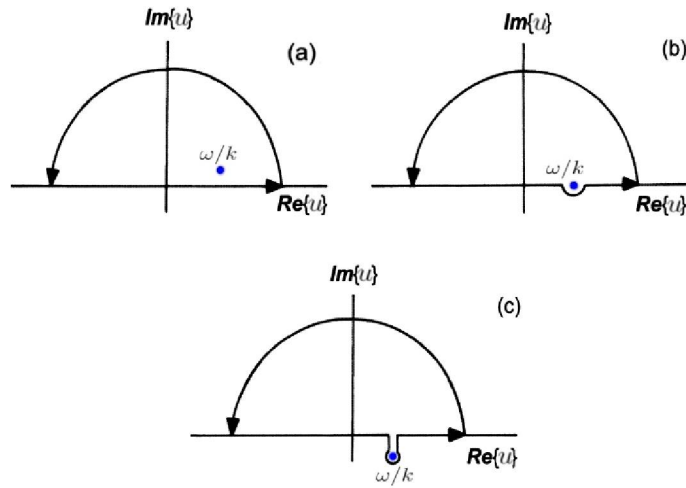


FIGURA 1.3 – Localização dos polos no plano complexo e caminho de integração seguindo o contorno de Landau. (a) polo localizado na parte imaginária positiva do plano complexo indica amplificação das ondas; (b) polo exatamente no caminho da integral indica que as ondas se propagam no plasma com ω real; (c) polo localizado na parte imaginária negativa do plano complexo indica amortecimento das ondas no plasma. Figura adaptada da referência [4].

De modo simplificado, a explicação física do amortecimento de Landau pode ser pensada de acordo com a função de distribuição de velocidade das partículas do plasma. Isso significa que a inclinação na função de distribuição de velocidade das partículas é o que determina o amortecimento ou a amplificação das ondas no sistema [15, 23].

Assim, se consideramos um sistema, no qual, a derivada de $\partial f_0(v)/\partial v < 0$ decresce com o aumento do módulo da velocidade na região de ressonância, ω/k , conforme ilustrado na Figura 1.4, então, as ondas serão amortecidas, uma vez que, neste caso existe mais partículas com velocidades, ligeiramente, inferiores a velocidade de fase da onda, $v < \omega/k$, (área azulada sob a curva) do que partículas com velocidades maiores, $v > \omega/k$, (área rosada sob a curva). Logo, existem mais partículas que ganham energia da onda do que partículas que transferem energia para a onda. De modo geral, plasma com função de distribuição de velocidades do tipo Maxwelliana não são propícios a turbulências, uma vez que as ondas sempre são amortecidas [5].

Por outro lado, quando adicionamos um feixe de elétrons na cauda da função de distribuição de velocidades do plasma, conforme ilustrado na Figura 1.5, obtemos um efeito contrário ao amortecimento de Landau [15]. Nesse caso, a presença da declividade com $\partial f_0/\partial v > 0$ na região de ressonância da função distribuição de velocidades, indica que existe mais partículas no sistema com velocidades maiores do que a velocidade das ondas que, podem ceder energia e amplificar as ondas no plasma. Uma consequência direta da amplificação de ondas para

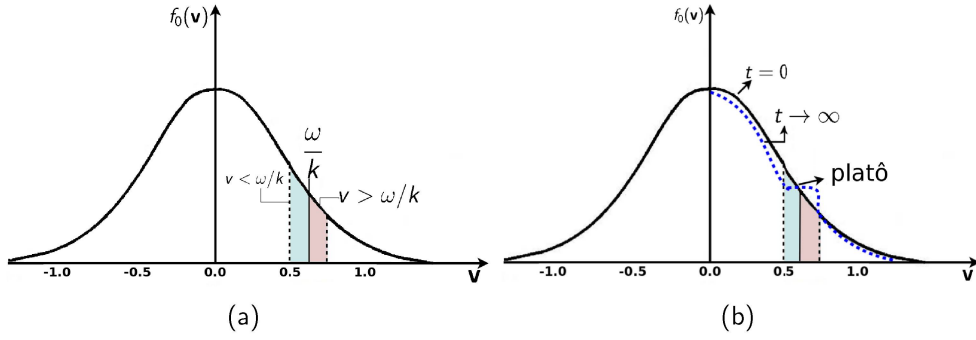


FIGURA 1.4 – Representação da região de ressonância para uma função de distribuição de velocidades do tipo Maxwelliana. A área azulada sob a curva indica que, para esse tipo de distribuição, existe mais partículas com velocidades ligeiramente menores que a velocidade da onda, ω/k , e, portanto, ganham energia da onda na interação. Consequentemente, a onda é atenuada. A área rosada sob a curva, representa partículas cujas velocidades são, ligeiramente, maiores do que a da onda. (b) A saturação na troca de energia onda-partícula é caracterizada pela formação de um platô, representado pela linha azul pontilhada, limitado à região de ressonância. Figura adaptada da referência [23]

distribuições, como representado na Figura 1.5(a), é o surgimento das, chamadas, instabilidades feixe-plasma (em inglês *bump-on-tail instability*), que por sua vez, pode dar origem às turbulências de Langmuir.

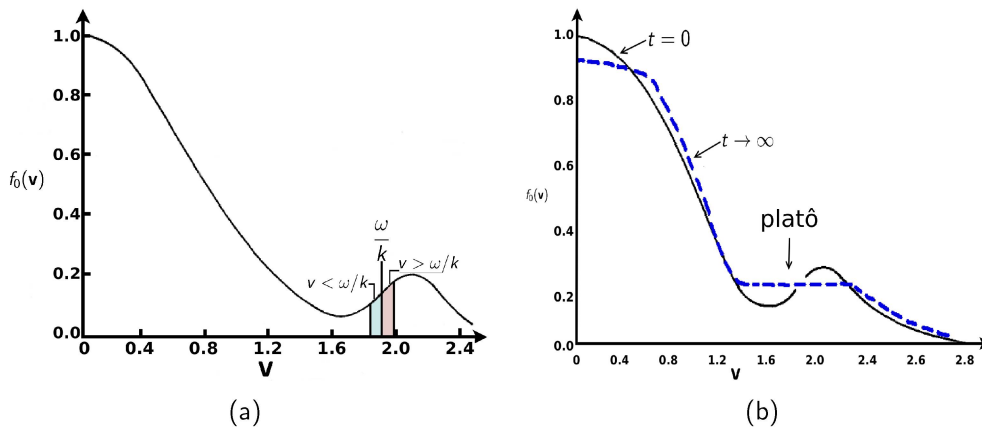


FIGURA 1.5 – Representação da região de ressonância para função de distribuição de velocidades de um sistema feixe-plasma. (a) O feixe está representado pelo pico com menor distribuição de elétrons adicionado à cauda da função de distribuição do plasma ambiente (pico maior). A área azulada sob a curva indica as partículas com velocidades, ligeiramente, menores que a velocidade da onda, enquanto que a área rosada, representa partículas com velocidades, ligeiramente, maiores que, cedem energia para as ondas na interação. A amplificação das ondas, ocasiona o surgimento das instabilidades feixe-plasma. (b) A saturação na troca de energia onda-partícula é caracterizada pela formação de um platô, entre a função de distribuição do plasma ambiente e do feixe, representado pela linha azul pontilhada. Figura adaptada da referência [23]

Em ambos os casos descritos acima, a saturação na troca de energia (momento) onda-partícula é acompanhada pela relaxação da função distribuição de velocidades dos elétrons, formando um platô na vizinhança da região de ressonância, conforme mostra a linha azul pontilhada nas Figuras 1.4(b) e 1.5(b). Esse processo é conhecido como *relaxação quase linear*⁷ ou *relaxação não colisional* e o achatamento (platô) nas vizinhanças da velocidade de fase da onda indica que a amplitude das oscilações torna-se cada vez menores.

No contexto da física de plasma não colisional, os fenômenos de amortecimento e amplificação, em geral, são descritos através das *teorias linear* e *quase linear* [15]. Os efeitos não lineares da interação autoconsistente onda-partícula, descritos a partir do conjunto cinético de equações acopladas de Vlasov-Poisson (Eq. (1.2)) para as variáveis dinâmicas, são amplamente discutidos tanto via métodos numéricos computacionais quanto via soluções analíticas [27].

A proposta desta tese é estudar os aspectos não lineares decorrentes da interação onda-partícula via dinâmica Hamiltoniana clássica em baixa dimensão. Nessa abordagem, a dinâmica das ondas de Langmuir é descrita como M osciladores harmônicos acoplados a N partículas quase ressonantes, onde a dinâmica das ondas e das partículas é colocada em pé de igualdade por meio de variáveis canônicas [1]. O tratamento empregado, na derivação do formalismo que estamos utilizando neste estudo [1], exige a adição da resposta das ondas ao movimento da partícula, o que caracteriza a *dinâmica Hamiltoniana autoconsistente onda-partícula*⁸.

De modo geral, os efeitos não lineares na interação autoconsistente onda-partícula podem ser identificados através do comportamento regular e caótico nas trajetórias das partículas no espaço de fase [30, 31]. A predominância do tipo de trajetória depende, principalmente, da amplitude da perturbação adicionada ao sistema que, por sua vez, influencia diretamente o movimento das partículas [32, 33]. Em geral, regiões onde prevalecem trajetórias regulares são mais favoráveis às acelerações coerentes de partículas (aprisionamento), enquanto que regiões com trajetórias caóticas podem estar relacionadas ao aquecimento e escape de partículas [34].

Objetivando estudar os mecanismos que levam ao caos em baixa dimensão, utilizamos em nossas análises o modelo de aproximação de uma única onda (**Single-Wave-Model**), introduzido por Onishchenko, O'Neil e outros [35, 36] para descrever a interação não linear de um sistema feixe-plasma para um plasma frio e um feixe tênue. Nesse modelo considera-se

⁷A descrição da relaxação quase linear foi pioneiramente enunciado em 1961 por Vedenov, Velikhov e Sagdeev [24] e de forma independente por Drummond e Pines [25]. A formação do platô na função de distribuição de velocidades dos elétrons foi reportada experimentalmente em 1971, disponível na referência [26].

⁸Neste formalismo, *Hamiltonianos autoconsistentes*, apenas interações onda-partícula são consideradas, nenhuma interação onda-onda ou partícula-partícula é contemplada [28, 29].

que a instabilidade ocorre ao longo do modo de Langmuir mais instável. Essa consideração é facilmente verificada durante o regime linear, no qual, enquanto a amplitude da onda cresce o feixe é aprisionado pelo potencial estável da onda [35, 36].

Após a saturação do regime linear, a amplitude da onda começa oscilar e o feixe começa oscilar junto ao potencial. A partir desse momento, modos com número de onda próximos às da onda inicial começam crescer e, eventualmente, podem atingir amplitudes comparadas ao da onda inicial [35, 36]. No entanto, considerando que o sistema é periódico, tal que, as ondas amplificadas após a saturação do regime linear possuem números de ondas proibidos pela condição de contorno, então, a aproximação para uma onda permanece válida, mesmo após a dinâmica atingir regimes não lineares [35, 36].

O estudo da interação onda-partícula via dinâmica Hamiltoniana clássica na aproximação de uma única onda em termos de alguns graus de liberdade, tem se mostrado bastante frutífero tanto para análise de dados experimentais [37] quanto em estudos teóricos por meio de resultados analíticos [38, 39] e de simulações numéricas computacionais [40–42]. Resultados obtidos através de um tubo de onda progressiva (**T**ravelling-**W**ave-**T**ube), considerando um feixe de elétrons suficientemente fraco⁹, comprovam experimentalmente a existência do domínio ressonante na aproximação de uma única onda, onde a sobreposição de ressonâncias é o principal mecanismo na transição para o regime caótico [43], conforme descrito em muitos sistemas via dinâmica Hamiltoniana.

Estudamos o surgimento e o comportamento geral do movimento caótico em baixa dimensão via dinâmica Hamiltoniana clássica [44]. Para isso, utilizamos um formalismo Hamiltoniano que descreve a interação ressonante onda-partícula para um plasma frio unidimensional e periódico [29]. Em geral, sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade são, inicialmente integráveis [45]. No entanto, o acréscimo de perturbações ao sistema caracteriza um espaço de fase que contém, simultaneamente, a presença de regiões regulares e caóticas [46]. Essas regiões regulares formam barreiras e proíbem as regiões caóticas de preencherem todo o espaço de fase [47]. Já, sistemas Hamiltonianos com mais de dois graus de liberdade, regiões regulares não separam mais o espaço de fase e, portanto, regiões caóticas passam a estar interconectadas através da chamada teia de Arnold [48].

Em nossas análises revisitamos a evolução do caso mais fundamental, no qual, considera-se a interação no modelo de uma única onda com apenas uma partícula ($N = 1$) [44]. Esse caso é completamente integrável, de forma que o retrato de fase compreende apenas trajetórias regulares. Identificamos, qualitativamente, a coalescência de dois tipos diferentes de estabilidade na mesma abscissa de um ponto fixo. Esse fenômeno, denominado *bifurcação sela-*

⁹Tal que é possível distinguir as partículas ressonantes das não ressonantes

nó¹⁰, ocorre para um valor específico do momento linear total ($P = 3/2$) e divide o espaço de fase em três diferentes topologias. Além disso, destacamos o papel da trajetória pela qual a intensidade da onda, I , passa por zero e, calculamos o valor específico do momento linear total para o qual essa trajetória coincide, assintoticamente, com a separatriz, estabelecendo, assim, uma bifurcação global no sistema [44].

Para o caso com duas partículas, ($N = 2$), nossa análise [44] mostra que a intensificação de movimentos caóticos ocorre tanto nos domínios próximos ao ponto fixo hiperbólico (como esperado) quanto na região próxima ao ponto fixo elíptico (atípico para sistema onda-partícula). A transformada de Fourier da amplitude do movimento total das partículas mostra que a evolução não linear do do sinal, próximo ao ponto fixo elíptico, dá origem ao aparecimento e intensificação de frequências de ressonâncias que, eventualmente, se torna suficiente para o aparecimento de caos no regime de energia negativa, $H < 0$. Próximo ao ponto hiperbólico, o sistema é fortemente sensível às condições iniciais (caótico), como já era esperado, pois a separatriz para o sistema com $N = 2$ gera um emaranhado homoclínico. A dinâmica caótica nesta região, ocorre no domínio de $H > 0$ e, é relatada como: *caos de separatriz* [44].

Descrevemos a dinâmica via métodos qualitativo e numérico computacional. A descrição qualitativa é realizada através de cálculos analíticos, relativamente simples e, fornecem informações importantes acerca da evolução do sistema. A principal vantagem desse método é que, em geral, os cálculos são mais simples do que aqueles pertinentes para uma integração analítica. Nessa abordagem, basicamente determinam-se as soluções assintóticas (os possíveis comportamentos do sistema quanto $t \rightarrow \infty$) e as estabilidades dessas soluções. Em contrapartida, perde-se parte das informações sobre o comportamento transiente do sistema, ou seja, sobre o comportamento que o sistema realiza antes de atingir um regime permanente [49].

Assim, a complementação das análises via método numérico computacional foi de grande importância para visualizar o comportamento transitório do sistema, integrando-se numericamente as equações de movimento para conjuntos de condições iniciais específicos. A integração numérica das equações de evolução dos sistemas foi realizada usando-se o integrador simplético *leap-frog*, que conserva exatamente a geometria do sistema e sua energia com bastante precisão para longos tempos de integração [50]. Para o caso não integrável, com duas partículas, utilizamos ainda o método denominado *seção de Poincaré* para interceptar as trajetórias e projetar a dinâmica geral do espaço de fase em $N - 1$ dimensões [51].

O estudo que realizamos nesta tese advém de uma série de trabalhos desenvolvidos, em grande parte, pelos pesquisadores do Laboratório de *Physique des interactions ioniques*

¹⁰A bifurcação sela-nó, também conhecida como bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o mecanismo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído [49].

et moléculaires - PIIM da Universidade de Aix-Marseille, França. Em suma, a ideia central deste tese estabeleceu-se enquanto estive trabalhando sob orientação do Prof. Yves Elskens no Laboratório PIIM, no período de março de 2019 a fevereiro de 2020. A oportunidade desse intercâmbio foi graças ao financiamento pelo projeto CAPES/COFECUB (Comitê Francês de Avaliação da Cooperação Universitária Com o Brasil) sob coordenação do Prof. Iberê Luiz Caldas do Grupo Controle de Oscilações da Universidade de São Paulo- SP.

O texto desta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 revisamos os conceitos fundamentais de sistemas Hamiltonianos, concentrando nossa discussão a partir da transição de formalismo Lagrange para o de Hamilton. No capítulo 3 direcionamos a descrição fundamental da interação ressonante onda-partícula em física de plasma via dinâmica Hamiltoniana clássica. A apresentação do formalismo Hamiltoniano autoconsistente que utilizamos nesta tese, bem como o modelo de aproximação para uma única onda, são descritos no capítulo 4. Os capítulos 5 e 6 destinam-se a exposição das análises para os casos com uma e duas partículas, respectivamente. Por fim, no capítulo 7 apresentamos as conclusões e as perspectivas de futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2 - Dinâmica de sistemas Hamiltonianos

Os sistemas Hamiltonianos constituem uma importante subclasse de sistemas dinâmicos conservativos, com ampla aplicabilidade em diversas áreas da física. Em resumo, o formalismo Hamiltoniano fornece um método eficiente e flexível na descrição de questões fundamentais da mecânica clássica além de servir de fundamento para a mecânica quântica e a mecânica estatística. Nas próximas seções, ao longo deste capítulo, revisitaremos as principais propriedades dos sistemas Hamiltonianos, e também os conceitos básicos relacionados à emergência de trajetórias caóticas no espaço de fase destes sistemas. Para isso, vamos centrar nossa discussão a partir da transição do formalismo de Lagrange para o de Hamilton. Essa abordagem busca familiarizar o leitor com as principais terminologias e conceitos básicos, que será de fundamental importância para a compreensão das análises dos sistemas que estudamos na presente tese via dinâmica Hamiltoniana clássica nos capítulos 5 e 6. A elaboração deste capítulo foi fundamentada utilizando como base principal as referências [45, 52–54] e demais citadas ao longo do capítulo.

2.1 Momentos canônicos e Equações de Hamilton

Na formulação Lagrangiana, as equações que governam o movimento de um sistema com n graus de liberdade são constituídas por um conjunto de n equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem no tempo, para as $q_i(t)$ coordenadas generalizadas, com $i = 1, \dots, n$. Assim, o movimento do sistema é univocamente determinado especificando-se as $2n$ condições iniciais, num instante inicial t_0 , a saber, todos os valores de q_i e \dot{q}_i . Geometricamente, esse movimento pode ser representado por uma curva traçada no espaço de configuração, cujas coordenadas são q_1, \dots, q_n .

Em contrapartida, a dinâmica Hamiltoniana consiste em substituir as n equações de Lagrange por um certo conjunto equivalente de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo para $2n$ variáveis independentes. Nesta formulação, o movimento pode ser, geometricamente, representado por uma curva no *espaço de fase*¹, cujas coordenadas são as variáveis independentes. A diferença fundamental do espaço de fase e do espaço de configuração, reside no fato de que, um ponto no espaço de configuração define apenas a configuração (posições) do sistema em um certo instante de tempo, enquanto que, no espaço de fase um ponto determina o estado do sistema, ou seja, sua configuração (posição) e a taxa de variação temporal desta configuração (velocidade) em um determinado instante.

Vale ressaltar que, prontamente, as equações de Lagrange podem ser substituídas por

¹A dimensão do espaço de fase é igual ao número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, que é igual ao de variáveis dependentes (ou variáveis de estado). Por exemplo, um plano é o espaço de fases para um sistema formado por duas equações de primeira ordem [49].

uma sistema equivalente de primeira ordem, com um número de equações duplicado, definindo as variáveis $s_i = \dot{q}_i$ com $i = 1, \dots, n$ e considerando q_i e s_i como $2n$ variáveis independentes. No entanto, as equações de movimento obtidas a partir de tal consideração não são úteis, uma vez que envolvem q_i e s_i de forma assimétrica.

Em 1835, Hamilton, mostrou que a duplicação simétrica do número de variáveis independentes é obtida devido à descrição da dinâmica por meio de $2n$ quantidades (q_i, p_i) onde p_i é definido como o *momento canônico conjugado* a q_i , escrito da seguinte forma

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde o teorema da função implícita [55] garante que as Eqs. (2.1) podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas, desde que a matriz hessiana $\mathbf{W} = (W_{ij})$ com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (2.2)$$

seja não-singular, ou seja $\det \mathbf{W} \neq 0$.

Por conseguinte, a descrição Hamiltoniana advém da substituição das variáveis (q, \dot{q}) por (q, p) para todas as grandezas mecânicas, e a definição de uma função $H(q, p, t)$ em detrimento à Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ para descrever a dinâmica. A substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos a introdução da função de Hamilton (Hamiltoniana $H(q, p, t)$) é realizada mediante uma transformação de Legendre e, então a função Hamiltoniana é dada por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (2.3)$$

No segundo membro da equação acima, presume-se as velocidades são dadas na forma $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$, devido a resolução das n equações para as n velocidades generalizadas em (2.1).

Tomando a diferencial de Eq. (2.3) podemos observar as principais características devido a introdução da função Hamiltoniana $H(q, p, t)$ na descrição dos sistemas, como resultado obtemos que

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\}, \quad (2.4)$$

onde em virtude da definição dos momentos canônicos em (2.1) e das equações de Lagrange

podemos, reescrever a equação acima como

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.5)$$

O resultado obtido em (2.5) evidencia que, de fato, a função Hamiltoniana H só depende das variáveis q_i e p_i . Por outro lado, temos também que

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (2.6)$$

tal que, comparando as Equações (2.5) e (2.6) resultamos em

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

As Equações (2.7) são chamadas de *Equações de Hamilton* ou *Equações canônicas de Hamilton*, e consistem num conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem correspondente ao sistema de n equações de segunda ordem de Lagrange.

Como subproduto, temos também que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) não se trata, simplesmente de uma equação de movimento, mas sim de uma importante relação entre as dependências temporais explícitas da Lagrangiana e da Hamiltoniana.

Na formulação Hamiltoniana as quantidades (q_i, p_i) são chamadas de *variáveis canônicas* e o espaço cartesiano de $2n$ dimensões onde os pontos são representados pelas $2n$ -uplas $(q_i, p_i) \equiv (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ é denominado: *espaço de fase*. Um ponto no espaço de fase define o estado do sistema, ou seja, fornece as informações sobre as posições e velocidades em um dado instante no tempo. No presente contexto a palavra “canônica” é usada no sentido de “padrão”.

O teorema da existência e unicidade assegura que a determinação do estado do sistema em um dado instante t_0 , define uma solução única de $(q(t), p(t))$ para as Equações de Hamilton. Assim, em cada ponto do espaço de fase passa apenas uma única trajetória dinâmica $(q(t), p(t))$, e duas trajetórias dinâmicas diferentes nunca se cruzam.

Outra questão importante a ser destacada no formalismo de Hamilton é que, ao contrário do da formulação Lagrangiana, na qual é válida a conexão $\dot{q}_i = dq_i/dt$, na formulação

Hamiltoniana não existe nenhum vínculo *a priori* entre as variáveis canônicas, isto é, os q_i e p_i são completamente independentes entre si.

Excluindo os casos nos quais a Hamiltoniana pode ser escrita diretamente, a construção das equações de movimento de Hamilton pode ser obtida considerando os seguintes passos: escolhidas as coordenadas generalizadas, constrói-se a Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$; as Equações (2.1) são resolvidas para as velocidades \dot{q}_i como funções de (q, p, t) ; substituindo os \dot{q}_i do passo anterior em (2.3) obtém-se a Hamiltoniana $H(q, p, t)$ por construção, e, uma vez obtida $H(q, p, t)$, as Equações de movimento do sistema podem ser calculadas a partir de (2.7).

2.2 Hamiltoniana e Energia total

Em geral, a Lagrangiana de um sistema é dada por

$$L = T - V, \quad (2.9)$$

onde T e V correspondem às energias cinética e potencial do sistema. Assim, se a energia cinética T é uma função puramente quadrática das velocidades e o potencial não depende das velocidades, então, pelo teorema de Euler das funções homogêneas, temos que

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T, \quad (2.10)$$

e, conseqüentemente,

$$H = T + V = E, \quad (2.11)$$

a *Hamiltoniana é igual a energia total do sistema* escrita em função das coordenadas e dos momentos canonicamente conjugado.

Na maioria dos casos de interesse físico as considerações feitas acima se cumprem, de forma que a Hamiltoniana possui um significado físico extremamente importante, uma vez que ela representa a energia total do sistema em diversas situações relevantes. Além disso, essas considerações são apenas suficientes, sendo possível que elas não sejam satisfeitas e, ainda assim, H coincida com a energia total, como o que ocorre, por exemplo, na dinâmica de uma partícula num campo eletromagnético externo com \mathbf{E} e \mathbf{B} estáticos.

2.3 Simetrias e Leis de conservação

Em suma, a conexão entre simetrias e leis de conservação, já estabelecida no formalismo Lagrangiano, pode ser obtida no formalismo Hamiltoniano. Realizando algumas manipulações a partir das Equações de Hamilton,

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{dH}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.12}$$

obtemos um resultado simples, mas de extrema importância para os sistemas Hamiltonianos, enunciado através de um Teorema: se a Hamiltoniana do sistema não depende explicitamente do tempo, tal que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,\tag{2.13}$$

então, H é constante de movimento.

É importante notar que, assim como em (2.8), H depende explicitamente do tempo apenas se o mesmo acontece com L . Assim, o teorema que enuncia H como constante de movimento para sistemas independentes, de fato, estabelece a própria Lei da conservação da energia total na grande maioria dos casos.

Em casos particulares, no entanto, pode acontecer de H se conservar, mas não corresponder a energia total ou o contrário, H representar a energia total, mas não ser conservado. Pode acontecer ainda de H ser a energia total e não se conservar, devido a uma dependência temporal explícita [56].

No que se refere à escolha de coordenadas existe uma importante distinção de comportamento entre a abordagem Lagrangiana e a Hamiltoniana. A forma funcional de uma Lagrangiana pode ser alterada para diferentes escolhas de coordenadas generalizadas, no entanto, seu valor permanece o mesmo. Por outro lado, na Hamiltoniana tanto a forma funcional quando o valor de H depende do conjunto de coordenadas generalizadas adotado. Isso significa que, pode acontecer de a quantidade representada por H ser conservada em um sistema de coordenadas e, em outro variar com o tempo, por exemplo.

2.4 Transformações canônicas e Funções geradoras

É de conhecimento que no formalismo Lagrangiano as Equações de movimento são invariantes sob transformação geral de coordenadas, ou seja, sua forma independe da escolha das coordenadas generalizadas. Ao contrário, no formalismo Hamiltoniano as coordenadas e momentos são variáveis dependentes, possibilitando, então, considerar mudanças de variáveis no espaço de fase, tal que as Equações de Hamilton sejam preservadas. Esse importante fator, amplia substancialmente a gama de transformações aceitáveis, o que possibilita enormemente, escolhas judiciosas das variáveis canônicas que simplifiquem a Hamiltoniana e, consequentemente, facilitem a resolução das equações de movimento.

Exclusivamente, uma transformação de variáveis no espaço de fase é de interesse, unicamente se ela preserva a forma canônica das Equações de movimento. Isso significa que, para as variáveis canônicas (q,p) , a Hamiltoniana $H(q,p,t)$ e as Equações de movimento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

a transformação inversível

$$Q_i = Q_i(q,p,t), \quad P_i = P_i(q,p,t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

é de interesse desde que seja possível obter uma função $K(Q,P,t)$, de modo que as Equações de movimento para as novas variáveis sejam da forma Hamiltoniana

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

É importante ressaltar que as Equações de movimento nas novas variáveis, necessariamente, devem ter a forma Hamiltoniana, independentemente, da função Hamiltoniana original $H(q,p,t)$.

A validade síncrona das Equações de movimento (2.14) e (2.16) implica na validade simultânea dos princípios variacionais

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \right\} dt = 0, \quad (2.17)$$

e

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K(Q,P,t) \right\} dt = 0. \quad (2.18)$$

As validade das Equações (2.17) e (2.18) é satisfeita se os respectivos integrandos dessa equações difiram pela derivada total em relação ao tempo de uma função $\Phi(q,p,t)$, uma vez que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi}{dt} = \delta \Phi(q(t_2), p(t_2)) - \delta \Phi(q(t_1), p(t_1)) = 0, \quad (2.19)$$

pois $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ e $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$. Dessa forma, a transformação (2.15) preserva a forma Hamiltoniana das Equações de movimento se

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.20)$$

cuja forma diferencial,

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\Phi, \quad (2.21)$$

serve para retratar uma transformação canônica. Assim, por definição, que a transformação inversível de (2.15) é denominada canônica se, e somente se, existem funções $K(Q,P,t)$ e $\Phi(q,p,t)$ tais que a Equação (2.21) seja satisfeita.

Observe que a forma de (2.21) sugere tratar Φ como uma função das antigas e novas coordenadas. Ou seja, consideremos, por exemplo, que as n primeiras Equações (2.15) possam ser resolvidas para os n p_i em termos de $Q(q,Q,t)$. Então, neste caso, as n últimas em (2.15) permitem escrever os momentos transformados em termos de (q,Q,t) . Isso significa que, podemos considerar (q,Q) como um conjunto de $2n$ variáveis independentes. Nesse sentido, definindo a *função geradora* $F_1(q,Q,t)$ como

$$F_1(q,Q,t) = \Phi(q,p(q,Q,t)), \quad (2.22)$$

e considerando a Equação (2.21) da transformação canônica, obtemos que

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

além disso,

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Nesse momento atenhamos-nos ao fato de que, em conhecimento da função geradora $F_1(q,Q,t)$, uma transformação canônica fica automaticamente definida pelas Equações (2.23),

com a Hamiltoniana transformada fornecida por (2.24). Observe ainda que, ao inverter as n primeiras Equações em (2.23) encontramos $Q_i = Q_i(q, p, t)$. Por conseguinte, inserindo este resultado no lado direito das n últimas Equações em (2.23) obtemos $P_i = P_i(q, p, t)$, e a mudança de variáveis no espaço de fase $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é canônica por construção.

As funções geradoras também podem ser do tipo híbridas como, por exemplo, para um sistema com dois graus de liberdade, $G(q_1, Q_1, q_2, P_2)$ onde os dois primeiros tipos são misturados. De qualquer forma, as funções nas variáveis antigas e novas interconectam as variáveis antigas e novas estabelecendo uma transformação canônica. A escolha de uma função geradora define, automaticamente, uma transformação canônica, no entanto, não é possível saber, a princípio, se a transformação simplificará a Hamiltoniana para um determinado sistema físico. Em contrapartida, a simples existência de alguma função geradora estabelece um critério fundamental para qualificar se uma mudança de variáveis no espaço de fase é canônica.

2.5 Constantes de movimento e Teorema de Poisson

Antes de iniciar a discussão sobre as *constantes de movimento* na dinâmica Hamiltoniana vamos primeiramente, discorrer sobre os chamados, *parênteses (ou colchetes)* de Poisson, cuja definição é primordial na identificação de transformações canônicas e constantes de movimento, assim como, do *Teorema de Poisson* propriamente dito.

Por definição, os colchetes de Poisson de duas variáveis dinâmicas arbitrárias F e G é escrito como

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right), \quad (2.25)$$

de modo que se considerarmos $F(q, p, t)$ como uma função qualquer das variáveis canônicas e do tempo t , utilizando as Equações de Hamilton

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.26)$$

obtemos que

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Dessa forma, se considerar primeiramente $F = q_i$ e em seguida $F = p_i$, obtêm-se as

Equações de Hamilton em termos dos colchetes de Poisson, ou seja,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (2.28)$$

uma vez que F não apresenta dependência temporal explícita independentemente da escolha.

Para as análises teóricas uma das principais vantagens de se escrever a equação de movimento de uma variável dinâmica arbitrária na forma (2.27) reside em uma importante propriedade dos colchetes de Poisson: de ser invariante sob transformações canônicas, ou seja,

$$\{F, G\}_z = \{F, G\}_\zeta, \quad (2.29)$$

se a transformação $\mathbf{z} \rightarrow \zeta$ é canônica. Em resumo, a Equação (2.27) não depende do conjunto de variáveis canônicas escolhido para descrever a dinâmica.

Outro fator importante relacionado aos colchetes de Poisson reside no papel fundamental que desempenham na transição da teoria clássica para a teoria quântica. No entanto, este assunto não será abordado na presente discussão, pois foge ao escopo da proposta desta tese.

Agora, para abrir a discussão sobre as constantes de movimento, tome como verdade² que a variação infinitesimal de uma variável dinâmica genérica $u(q, p, t)$ é definida como

$$\delta u = u(q + \delta q, p + \delta p, t) - u(q, p, t), \quad (2.30)$$

de modo que o resultado de uma transformação canônica infinitesimal

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (2.31)$$

permite escrever

$$\delta u = \epsilon \{u, G\}. \quad (2.32)$$

Agora consideremos que $u = H$ e que G é uma função que não dependa explicitamente do tempo. Dessa forma, por intermédio de (2.27) temos que a Equação (2.32) torna-se

$$\delta H = \epsilon \{H, G\} = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (2.33)$$

²Para uma discussão mais profunda consulte a referência. [54].

A Equação (2.33) infere um importante resultado, o qual define que: se H é invariante sob uma transformação canônica infinitesimal, ou seja, $\delta H = 0$, então, sua função geradora é uma constante de movimento. De modo recíproco, cada constante de movimento gera uma transformação canônica infinitesimal que deixa H invariante.

Outra propriedade de interesse acerca das constantes de movimento é enunciada por meio do Teorema de Poisson, o qual reitera que: os colchetes de Poisson de duas constantes de movimento é também uma constante de movimento. Em alguns casos, é possível também gerar novas constantes de movimento a partir dos colchetes de Poisson de constantes de movimento conhecidas. No entanto, na maioria das vezes, estes colchetes de Poisson são identicamente constantes ou funções das constantes de movimento previamente conhecidas.

2.6 Variáveis de Ação e Ângulo

Os sistemas periódicos são de grande importância em praticamente todas as áreas da física. Em geral, as frequências de tais sistemas são obtidas a partir do método de Hamilton-Jacobi. Esse método consiste em definir variáveis de *ação* e *ângulo* e, portanto, não requer a solução detalhada das equações de movimento. Porém, antes de definir as variáveis de ação e ângulo, é didaticamente apropriado, conhecermos a classe de problemas tratáveis por seu intermédio.

2.6.1 Sistemas multiperíódicos

Por definição um sistema *separável*³ é dito *multiperíódico* se a projeção do movimento sobre cada plano (q_i, p_i) se encaixa em uma das seguintes situações:

- (i) quando a curva $p_i = p_i(q_i, \alpha)$ é fechada, tal que, q_i oscila entre dois limites definidos, por exemplo $q_i = a_i$ e $q_i = b_i$, conforme exemplifica a Figura 2.1(a);
- (ii) ou se p_i é uma função periódica de q_i , conforme exemplificado na Figura 2.1(b). É importante ressaltar que q_i não está condicionada a ser uma função periódica do tempo.

³Um sistema cuja Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo é dito separável se, para algum conjunto de coordenadas generalizadas (q_1, \dots, q_n) , existe uma integral completa da Equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo da forma

$$W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = W_1(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \dots + W_n(q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.34)$$

No caso de um sistema separável, temos

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = f_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.35)$$

Esta última Equação é a projeção no plano (q_i, p_i) do movimento que o sistema realiza no espaço de fase.

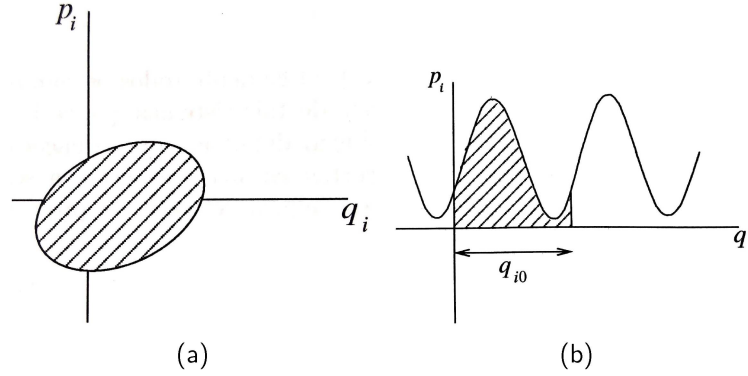


FIGURA 2.1 – Movimentos de (a) libração e (b) rotação no espaço de fase (q_i, p_i) . Figura proveniente da referência [54].

O caso (i) é tradicionalmente chamado de *libração*⁴ e, pode ser visualizado, por exemplo, na dinâmica de um oscilador unidimensional [57]. O caso (ii) é chamado de *rotação*, pois ocorre, principalmente, quando q_i é uma coordenada cíclica como no exemplo de um corpo rígido girando livremente em torno de um eixo fixo, com ângulo de rotação q , de forma que a cada volta completa q varia de 2π e o estado do sistema se repete.

Pode acontecer também de um sistema apresentar tanto o movimento de libração quanto de rotação, dependendo do valor da energia, como é o caso, por exemplo, do pêndulo simples. A equação que rege a dinâmica de um pêndulo simples de massa m suspenso por uma haste rígida de comprimento l e massa desprezível é dada por

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta = E, \quad (2.36)$$

onde o nível zero do potencial gravitacional coincide com o plano horizontal que contém o ponto de suspensão do pêndulo.

A partir da Equação (2.36), observe que se $E < mgl$, então $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ sendo $\theta_0 = -E/mgl$. Isso significa que o pêndulo oscila periodicamente entre $-\theta_0$ e θ_0 , ou seja, executa um movimento de libração. No espaço de fase esse movimento corresponde a uma curva fechada, conforme representado pelas curvas verdes na Figura 2.2.

Quando $E > mgl$, então θ pode assumir qualquer valor, tal que o pêndulo permanece girando indefinidamente em torno do ponto de suspensão. Cada vez que o ângulo θ varia de 2π o movimento se repete, caracterizando uma rotação. Na Figura 2.2 esse movimento é representado pelas curvas vermelhas.

⁴Esse termo é genuinamente empregado em astronomia, onde descreve a oscilação rotacional de qualquer objeto planetário, até encontrar sua posição de equilíbrio.

O caso com $E = mgl$ corresponde a uma situação limite instável do pêndulo, pois $\theta = \pi$. Isso significa que a energia cinética reduz-se a zero e, então, o pêndulo poderia permanecer nessa posição indefinidamente na ausência de qualquer perturbação. A curva azul, da Figura 2.2, que separa os casos de libração e rotação, é chamada de *separatriz*. A separatriz sempre passa, assintoticamente, a um ponto de equilíbrio instável. O movimento nas proximidades da separatriz, em geral, apresenta forte sensibilidade às condições iniciais, pois os pontos em qualquer lado da separatriz podem apresentar trajetórias com comportamentos bastante diferentes.

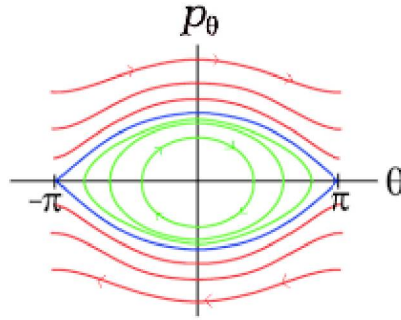


FIGURA 2.2 – Representação esquemática do movimento de um pêndulo simples no espaço (θ, p_θ) . As curvas verdes representam um movimento de libração, as curvas vermelhas representam um movimento de rotação e a curva azul corresponde a separatriz do sistema, que separa os casos de libração e rotação. Figura proveniente da referência [58].

Para os sistemas multiperiódicos, o cálculo das frequências associadas ao movimento podem ser realizados através das chamadas *variáveis de ação e de ângulo*, que vamos descrever na próxima subseção. Essa técnica facilita bastante a análise de sistema, sobretudo, quando a descrição das frequências dos vários movimentos é mais interessante do que o detalhamento do comportamento dinâmico.

2.6.2 Variáveis Ação-Ângulo

Um sistema separável multiperiódico com n graus de liberdade, as *variáveis de ação* são definidas como

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.37)$$

onde, dependendo do caso, as integrais estendem-se por um período de libração ou de rotação. Assim, geometricamente, $2\pi J_i$ corresponde a área hachurada ilustrada nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b).

Retornando à Equação (2.35), observe que os J_i são funções de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ou, inver-

samente,

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n). \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) na integral completa da Equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo (2.34), obtemos que

$$W(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n), \quad (2.39)$$

de forma que, agora, as constantes J_i é que são identificadas com os novos momentos P_i . Assim, considerando a transformação canônica gerada por $W(q, J)$, temos que a nova Hamiltoniana é dada por

$$K = H = \alpha_1(J_1, \dots, J_n) \equiv H(J_1, \dots, J_n), \quad (2.40)$$

tal que, a nova Hamiltoniana K é essencialmente a Hamiltoniana original H expressa em função das variáveis de ação.

Por conseguinte, as variáveis canônicas conjugadas aos J_i , denominadas, *variáveis angulares*, φ_i , são definidas como

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}. \quad (2.41)$$

As Equações de movimento das variáveis angulares φ_i , se escrevem como

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i, \quad (2.42)$$

cuja solução imediata é

$$\varphi_i = \varphi_i(0) + \omega_i t. \quad (2.43)$$

Observe que os ω_i são constantes, pois somente dependem das constantes J_i . O significado físico dos ω_i possui notória importância na descrição dos sistemas Hamiltonianos e, será, portanto, elucidado na próxima subseção.

2.6.3 Frequências fundamentais

Para um sistema periódico com período τ , é evidente que a projeção do movimento sobre cada plano de fase também é periódica e, portanto, as razões das frequências correspondentes são números racionais. Isso significa que, após um tempo τ cada grau de liberdade do

sistema terá executado um número inteiro de voltas completas. É importante destacar também que, como os J_i são constantes, então, a mudança correspondente em cada variável angular é devido à variação das coordenadas q_k . Dessa forma, utilizando a Equação (2.41) e invertendo a ordem da diferenciação, temos que para um período do movimento no espaço de fase

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_i &= \oint \sum_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k} dq_k, \\ \Delta\varphi_i &= \oint \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial J_i} dq_k, \\ \Delta\varphi_i &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k,\end{aligned}\tag{2.44}$$

Agora, utilizando (2.34) e (2.35), podemos reescrever (2.44) como

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_i &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k \frac{\partial W_k}{\partial q_k} dq_k, \\ \Delta\varphi_i &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k p_k dq_k.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Assim, se definirmos n_k como o número de voltas completas realizadas pela coordenada q_k em um período τ , então,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_i &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k n_k 2\pi J_k, \\ \Delta\varphi_i &= 2\pi n_i.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Ou seja, cada variável φ_i cresce de um múltiplo inteiro de 2π em um período do movimento, isso, portanto, justifica considerá-la um ângulo. No entanto se,

$$\tau = n_i \tau_i,\tag{2.47}$$

onde τ_i é o período correspondente ao i -ésimo grau de liberdade. E, pela Eq.(2.43), temos ainda que

$$\Delta\varphi_i = \omega_i \tau,\tag{2.48}$$

de forma que, a partir de (2.46), (2.47) e (2.48), deduz-se imediatamente que

$$\omega_i \tau_i = 2\pi, \quad i = 1, \dots, n.\tag{2.49}$$

Portanto, conclui-se que os ω_i são as *frequências fundamentais do sistema*, ou seja, as frequências do movimento periódico executado por cada grau de liberdade do sistema. É importante atentar-se que o termo “frequência”, está sendo utilizado aqui no sentido de “frequência angular”. As frequências fundamentais podem obtidas a partir das derivadas parciais da Hamiltoniana que descreve a dinâmica em relação às variáveis de ação.

2.7 Integrabilidade de sistemas Hamiltonianos

O discernimento quanto a *integrabilidade* de um sistema mecânico qualquer, está, intimamente, relacionado à possibilidade de resolução explícita de suas equações de movimento. Caso seja possível por qualquer método encontrar uma integral completa das equações de Hamilton-Jacobi, $S(q, \alpha, t) = \alpha_1 t$, para um sistema conservativo com n graus de liberdade, os momentos canônicos transformados $P_k = \alpha_k(q, p)$ obtidos por inversão de $p_k = \partial W / \partial q_k$ formam um conjunto de n constantes de movimento claramente em *involução* e, portanto, as equações de movimento podem ser resolvidas por quadraturas.

Por definição, as m variáveis dinâmicas $F_1(q, p), \dots, F_m(q, p)$ quaisquer, estão em *involução* se o colchete de Poisson de quaisquer duas delas é zero,

$$\{F_k, F_l\} = 0, \quad k, l = 1, \dots, m. \quad (2.50)$$

O caso do pião simétrico com um ponto fixo ⁵, por exemplo, possui três graus de liberdade e três constantes de movimento independentes, a saber, p_ϕ , p_ψ e H , tal que os colchetes de Poisson de qualquer par dessas três constantes de movimento é nulo e, portanto, o movimento do pião pode ser resolvido por quadraturas.

Outro exemplo clássico é o de um projétil em três dimensões, no qual as variáveis p_x , p_y e H são constantes de movimento em involução. Logo, uma integral completa da Equação de Hamilton-Jacobi associada pode ser facilmente obtida por separação de variáveis e, então, as equações de movimento podem ser resolvidas por quadraturas ⁶.

Dito isto, podemos, portanto, inferir que a integrabilidade de um sistema com n graus de liberdade está intrinsecamente associada à existência de n constantes de movimento em involução. De fato, por definição, um sistema Hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade e Hamiltoniana $H(q, p)$ é dito *completamente integrável* ou simplesmente *integrável*

⁵Para uma descrição detalhada deste sistema, consulte a Seção 4.9 da referência [54].

⁶Para conhecimento consulte o exemplo 9.3.2 da referência [54].

se existem n constantes de movimento independentes em involução, ou seja,

$$\{F_i, H\} = 0, \quad \{F_i, F_j\} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.51)$$

com os vetores ∇F_i linearmente independentes em cada ponto do espaço de fase, sendo, $\nabla = (\partial/\partial q_i, \partial/\partial p_i)$ o operador nabla no espaço de fase. Em contrapartida, se a condição acima não é satisfeita o sistema Hamiltoniano é dito *não-integrável*.

Além disso, temos ainda que, se um sistema Hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade admite n constantes de movimento em involução $F_1(q,p), \dots, F_n(q,p)$ e a matriz com elementos $W_{kl} = \partial F_k / \partial p_l$ é não-singular, então, existem variáveis canônicas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, J_1, \dots, J_n)$ tais que $H = H(J_1, \dots, J_n)$.

A veracidade das definições acima foram, inicialmente, realizadas por Poisson (em 1837) e Liouville (em 1840), através de um teorema, onde demonstrou-se que se um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade possui duas constantes de movimento independentes em involução, então suas equações de movimento podem ser resolvidas por quadraturas. A generalização deste teorema foi enunciada, em 1955, por Liouville, e, posteriormente, enriquecido pela contribuição de Arnold.

Um importante resultado acerca de sistemas Hamiltonianos integrável é enunciado a partir do Teorema de Liouville-Arnold, onde fica estabelecido que para um sistemas Hamiltoniano integrável com n graus de liberdade:

- (i) Existem variáveis canônicas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, J_1, \dots, J_n)$ tais que $H = H(J_1, \dots, J_n)$ e, portanto, a solução das Equações de movimento para as novas variáveis é dada por

$$J_k = \text{constante}, \quad \varphi_k = \varphi_k(0) + \omega_k(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.52)$$

sendo que cada $\omega_k = \partial H / \partial J_k$ é constante.

- (ii) Nas variáveis originais (q,p) as Equações de Hamilton aceita soluções por quadraturas.
- (iii) Se o conjunto das hipersuperfícies de nível das constantes de movimento em involução F_k , definido por

$$\mathcal{M}_C = \{(q,p) | F_k(q,p) = C_k, \quad k = 1, \dots, n\}, \quad (2.53)$$

é compacto e conexo ⁷, então, as variáveis canônicas (J, φ) podem ser escolhidas

⁷Neste contexto, compacto significa o mesmo que fechado e limitado, e, um conjunto é conexo se não é a

como variáveis de ação-ângulo e o movimento é multi-periódico com frequência $\omega_k = \partial H / \partial J_k$.

Uma característica importante do teorema exposto acima é que, se o movimento de um sistema integrável é limitado, a região do espaço de fase é finita e, então, o conjunto das hipersuperfícies de nível das constantes de movimento, \mathcal{M}_C , é uma variedade compacta.

Outro fator importante exposto no item (iii) do teorema de Liouville-Arnold é, que \mathcal{M}_C se faz descrita por n ângulos e, portanto, coincide topologicamente com um toro n -dimensional (conforme Figura 2.3 para $n = 2$). Adicionalmente, em virtude das variáveis canônicas definidas no item (i), as Equações $J_k = C_k$ definem em que toro o sistema se encontra, enquanto que os φ_k são coordenadas sobre o toro. Uma órbita que inicia em um desses n -toros nele permanece infinitamente. Tais toros são denominados de *toros invariantes*.

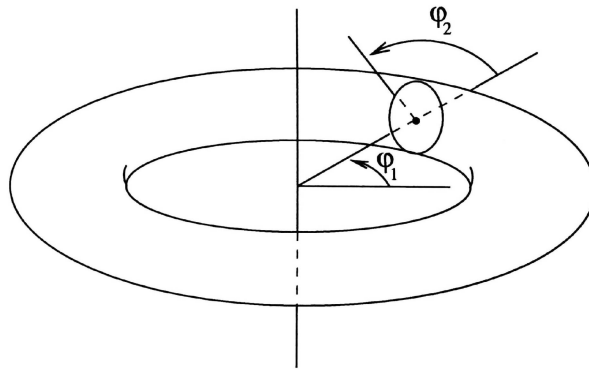


FIGURA 2.3 – Representação esquemática do movimento sobre um toro invariante bi-dimensional, $n = 2$. Figura proveniente da referência [54].

A Equação (2.52) mostra que pequenos desvios das condições iniciais de um sistema integrável crescem linearmente com o tempo. Isso implica que o movimento de sistema integrável é *regular*. Por outro lado, os sistemas não-integráveis podem, em algumas regiões do espaço de fase, apresentar forte sensibilidade nas condições iniciais, tais que pequenas alterações nas condições iniciais podem crescer exponencialmente com o tempo, tornando impossível previsões quanto ao comportamento do sistema mesmo a curto prazo. Esse tipo de movimento é chamado de irregular ou *caótico*. Logo, *caos* é um fenômeno exclusivo dos sistemas não-integráveis.

união de conjuntos disjuntos.

2.7.1 Toros ressonantes e não ressonantes

A variedade em que se estende o movimento de um sistema Hamiltoniano integrável $H_0(J)$, é um n -toro T^n . Assim, supondo que as frequências $\omega_1, \dots, \omega_n$ sejam incomensuráveis, ou seja, racionalmente independentes, então, dados n números inteiros m_1, \dots, m_n podemos escrever

$$\sum_{k=1}^n m_k \omega_k = 0 \iff m_1 = \dots = m_n = 0. \quad (2.54)$$

Após um tempo suficientemente longo, a órbita retorna a uma vizinhança arbitrariamente pequena do ponto de partida sobre o toro T^n , no entanto, não se fecha com o ponto inicial. Essa propriedade revela que as órbitas são *densas* em T^n . O movimento realizado pela trajetória é denominado *quase-periódico* e o toro percorrido pela trajetória do sistema é chamado *toro não-ressonante*. Do contrário, quando as frequências são racionalmente dependentes os toros são chamados de *toros ressonantes*.

2.7.2 Teorema KAM

Uma questão natural que especulava acerca da integrabilidade dos toros quando o sistema é submetido a pequenas perturbações, foi respondida, em etapas, através de um teorema fundamental de sistemas Hamiltonianos, denominado, Teorema KAM⁸. Sumariamente, obteve-se que quando uma perturbação suficientemente pequena é adicionada a um sistema integrável, parte dos toros (em sua maioria) assumem uma forma distorcida e, preenchem a maior parte do espaço de fase. Já a parte restante dos toros são quebrados (ou destruídos) e distribuem-se entre os que são preservados de uma maneira extremamente irregular, de modo que o volume que eles ocupam no espaço de fase tende a zero juntamente com a perturbação.

Para prosseguirmos com uma descrição qualitativa do teorema KAM,⁹ consideremos uma Hamiltoniana perturbada

$$H(\varphi, J; \epsilon) = H_0(J) + \epsilon H_1(\varphi, J), \quad (2.55)$$

escrita em termos da Hamiltoniana integrável H_0 , mais uma Hamiltoniana relacionada a perturbação H_1 e, suponhamos que a perturbação quebre a integrabilidade do sistema. Logo, o problema fundamental, neste caso, consiste em determinar se a perturbação modifica ape-

⁸Acrônimo devido aos trabalhos destes três pesquisadores Kolmogorov-Arnold-Moser, que em momentos diferentes, solucionaram a questão da integrabilidade quando adicionada pequenas perturbações ao sistema.

⁹A demonstração detalhada deste teorema pode ser consultada nos trabalhos originais de Kolmogorov [59], Arnold [60] e Moser [61] ou, de forma mais simplificada - mas ainda assim trabalhosa - de casos particulares do teorema nas referências [52, 53, 57].

nas ligeiramente os movimentos descritos por $H_0(J)$ ou os destrói completamente. Em geral, no que se refere aos toros ressonantes, diversos argumentos genéricos e exemplos específicos indicam que por menor que seja a perturbação tais toros serão destruídos. Já para os toros não-ressonantes a indagação proferida devido a quebra da integrabilidade é esclarecida através do teorema KAM.

De forma simplificada o teorema KAM afirma que: “se as frequências de um sistema Hamiltoniano integrável H_0 são racionalmente independentes e suficientemente irracionais, então, para ϵ suficientemente pequeno, as soluções do sistema perturbado (2.55) são preponderantemente quase-periódicas e só diferem ligeiramente das do sistema não perturbado. Em sua maioria, os toros não-ressonantes de H_0 são apenas levemente deformados e o sistema perturbado também possui toros não-ressonantes, sobre os quais as órbitas são densas” [54].

Vale ressaltar ainda que as órbitas às quais o teorema não se aplica estão densamente distribuídas no conjunto das órbitas abrangidas pelo teorema, de modo que os sistemas Hamiltonianos em geral apresentam em seu espaço de fase uma mistura complicada de movimentos regulares com movimentos irregulares ou caóticos.

2.8 Estabilidade dos pontos de equilíbrio e variedades estáveis e instáveis

O conceito de estabilidade é amplamente utilizado para caracterizar tanto pontos de equilíbrio quanto órbitas periódicas. A determinação da natureza dos pontos de equilíbrio e de órbitas periódicas compreende uma análise sobre o comportamento dinâmico de suas vizinhanças. Em sistemas Hamiltonianos autônomos, os pontos fixos representam as soluções estacionárias, ou seja, os valores de (q_i, p_i) tais que quando

$$(q_i, p_i) = (q_i^*, p_i^*) \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.56)$$

o sistema para de se mover no espaço de fase. Isso significa que,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad (2.57)$$

em $(q_i, p_i) = (q_i^*, p_i^*)$. Portanto, se uma condição inicial escolhida coincidir com o ponto fixo, então, o sistema permanece nesse ponto indefinidamente. Qualquer ponto (q_i, p_i) que não seja ponto fixo, é chamado de ponto ordinário ou ponto regular.

A determinação da estabilidade de um ponto fixo é feita a partir do comportamento dinâmico no em torno de sua vizinhança. De modo que, um *ponto de equilíbrio é assintoticamente estável* se a resposta do sistema a uma perturbação arbitrária se aproxima de (q_i^*, p_i^*) quando $t \rightarrow \infty$ ou, o *ponto de equilíbrio é instável*, se a resposta do sistema a uma pequena

perturbação arbitrária em (q_i^*, p_i^*) cresce quando $t \rightarrow \infty$.

Suponhamos, por exemplo, um ponto de equilíbrio $\chi_i^* : (q_i^*, p_i^*)$ de um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade, de tal modo que,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{p_i^*} = \frac{\partial H}{\partial p_i^*} = 0, \quad (2.58)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{q_i^*} = \frac{\partial H}{\partial q_i^*} = 0. \quad (2.59)$$

Em seguida, consideramos que o ponto $\chi : (q, p)$, difere do ponto de equilíbrio $\chi_0 : (q_0, p_0)$ por uma pequena variação $(\delta q, \delta p)$. de modo que

$$q - q_0 = \delta q \quad \text{e} \quad p - p_0 = \delta p. \quad (2.60)$$

Assim, substituindo as Equações (2.60) nas Equações de movimento de Hamilton e expandindo o resultado desta substituição em primeira ordem nos desvios δq_i e δp_i , obtemos que

$$\dot{q} = \delta \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_0} + \frac{\partial H^2}{\partial q_0 \partial p_0} \delta q + \frac{\partial H^2}{\partial p_0^2} \delta p, \quad (2.61)$$

$$\dot{p} = \delta \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_0} + \frac{\partial H^2}{\partial q_0^2} \delta q + \frac{\partial H^2}{\partial q_0 \partial p_0} \delta p. \quad (2.62)$$

As Equações (2.61) e (2.62) podem ainda ser reescritas de forma matricial, de modo que,

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

onde os elementos da matriz propagação A são coeficientes constantes. Na sua forma simplética a Equação (2.63) é dada por

$$\delta \dot{\chi} = A \delta \chi = J H'' \chi, \quad (2.64)$$

sendo $H''_{ij} \equiv \partial^2 H(q_0, p_0) / \partial \chi_i \partial \chi_j$. Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio é determinada a partir do autovalor da matriz H

$$\lambda = \pm \sqrt{-\det H''}, \quad (2.65)$$

onde os autovalores, λ , podem ser reais se $\det H'' < 0$ ou imaginários puros se $\det H'' > 0$, o que implica que $\lambda^* = -\lambda$.

Para o caso em que os dois autovalores de A são reais, uma combinação linear de um deslocamento arbitrário dos autovetores v_1 e v_2 , nos permite escrever a evolução temporal das trajetórias vizinhas ao ponto fixo χ_0 como

$$\delta\chi(t) = V_0 S(t) V_0^{-1} \delta\chi(0), \quad (2.66)$$

onde V_0 e $S(t)$ foram definidos para simplificar a notação das equações que culminam em (2.66)

Assim, neste caso, o comportamento das trajetórias no entorno de ponto de equilíbrio corresponde a uma mistura de afastamentos e aproximações exponenciais. De forma que, as trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio a partir de uma das direções (correspondendo a direção do autovetor associado ao autovalor negativo) e se afastam pela outra direção (correspondendo a direção do autovetor associado ao autovalor positivo) a uma mesma taxa. Portanto, o ponto de equilíbrio, para o qual os autovetores são reais, é classificado como instável (ou ponto de sela hiperbólico), pois quaisquer deslocamentos recaem sobre as trajetórias que se afastam do ponto de equilíbrio χ_0 .

Já para o caso em que os dois autovalores de A são imaginários puros, a evolução temporal das trajetórias vizinhas ao ponto fixo χ_0 é dada por

$$\delta\chi(t) = U_0 R(t) U_0^{-1} \delta\chi(0), \quad (2.67)$$

onde, analogamente ao caso anterior, U_0 e $R(t)$ foram definidos para simplificar a notação das equações que culminam em (2.67).

Neste caso, o comportamento das trajetórias nas vizinhanças do ponto de equilíbrio corresponde a uma série de rotações no sistema de coordenadas $\delta\beta = U_0^{-1} \delta\chi$, de forma que, o ponto de equilíbrio é classificado como estável ou elíptico, pois quaisquer deslocamentos permanecem rotacionando em torno de χ_0 .

Tomando como exemplo o espaço de fase ilustrado na Figura 2.4, o ponto O (bolinha azul) representa o ponto fixo elíptico (estável), enquanto que os pontos A e B (bolinhas vermelhas) representam os pontos fixos hiperbólicos (instáveis). As duas curvas W^s e W^u que passam pelos pontos A e B definem as variedades estáveis e instáveis do sistema. Portanto, as definições de variedades estáveis e instáveis são uma generalização do conceito de separatriz (discutido na subseção 2.6.3).

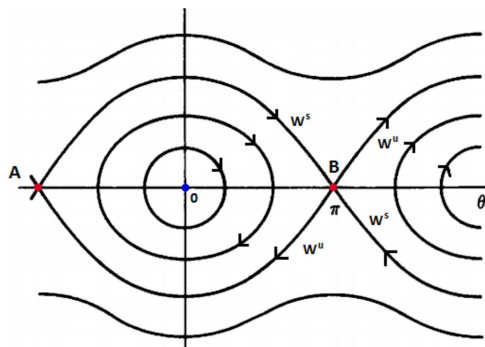


FIGURA 2.4 – Espaço de fase de um pêndulo não linear. O ponto O, destacado em azul representa o ponto fixo elíptico e os pontos em vermelho, A e B, representam os pontos fixos hiperbólicos. As linhas com as marcações W^s e W^u correspondem as variedades estáveis e instáveis do ponto hiperbólico, respectivamente.

As variedades de um sistema dinâmico são superfícies no espaço de fases, nas quais, as trajetórias que nelas se iniciam, nelas permaneçam durante toda a evolução do sistema. Assim, um conjunto invariante M é definido como uma coleção de órbitas que formam essas superfícies. As órbitas que se aproximam, assintoticamente, de uma variedade invariante são chamadas de *variedades estáveis* W^s , enquanto que, as órbitas que se afastam do conjunto M são denominadas de *variedades instáveis* W^u .

Nesse sentido, define-se que a variedade estável W^s de um ponto de equilíbrio instável é o conjunto invariante¹⁰ de pontos χ do espaço de fases, tal que à trajetória associada a evolução temporal de χ tende assintoticamente a esse ponto. E, a variedade instável W^u de um ponto de equilíbrio instável é o conjunto invariante de pontos χ do espaço de fases, para os quais, a trajetória associada à evolução temporal de χ , quando iterada para trás no tempo, tende, assintoticamente, a esse ponto. Uma propriedade importante das variedades estáveis e instáveis é que elas não podem interseccionar umas com as outras, devido à unicidade das soluções.

2.8.1 Emaranhamento homoclínico e dinâmica caótica

De acordo com que discutimos, anteriormente, na subseção 2.7.2, o teorema KAM estabelece que a maior parte dos toros irracionais de um sistema integrável acaba sobrevivendo a pequenas perturbações no sistema. No entanto, o comportamento das trajetórias que estão dispostas sobre os toros racionais não é contemplado por esse teorema. A resposta a essa questão pode ser obtida através do teorema de Poincaré-Birkhoff. Esse teorema prevê o rompimento de toros racionais, os quais, antes cobertos por órbitas periódicas, são substituídos por um número par de órbitas periódicas, em que metade das órbitas são estáveis e metade

¹⁰Um conjunto (W^s ou W^u) é dito invariante quando todos os pontos $\chi \in W^s$ (ou W^u) são transportados pela dinâmica a outros pontos que também pertencem às variedades W^s (ou W^u).

são instáveis.

A presença de pontos fixos instáveis, ou hiperbólicos, é vista como de grande influência sobre a dinâmica, pois eles, tipicamente, resultam nos, chamados, *pontos homoclínicos* e *heteroclínicos*. Um ponto homoclínico é definido através do cruzamento das variedades estáveis e instáveis em um ponto hiperbólico, conforme representado na Figura 2.5(a), enquanto que, um ponto heteroclínico é definido pelo cruzamento das variedades instáveis e estáveis de dois pontos fixos hiperbólicos, conforme mostra a Figura 2.5(b).

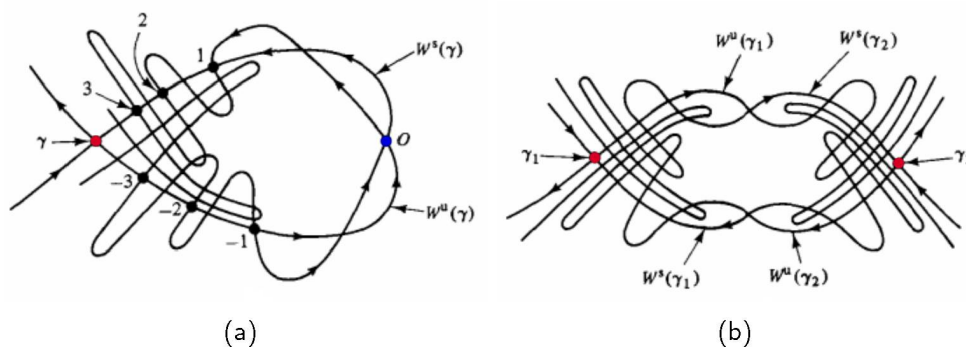


FIGURA 2.5 – Representação (a) de um ponto homoclínico O , formado pelo cruzamento das variedades estáveis $W^s(\gamma)$ e instáveis $W^u(\gamma)$ de um ponto fixo hiperbólico γ . (b) ponto heteroclínico definido através do cruzamento das variedades estáveis $W^s(\gamma_1)$, $W^s(\gamma_2)$ e instáveis $W^u(\gamma_1)$, $W^u(\gamma_2)$ de dois pontos fixos hiperbólicos, γ_1 e γ_2 . Figura adaptada da referência [57]

Considerando-se a iteração sobre o ponto O , situado sobre a intersecção entre as variedades instáveis e estáveis, na Figura 2.5(a), como resultado teremos que o ponto O é mapeado novamente sobre o cruzamento das variedades W^s e W^u , tornando-se um novo ponto homoclínico. Esse mesmo efeito é repetido para as iterações a partir dos novos pontos gerados a partir do ponto homoclínico. Assim, ao iterar o ponto O para frente no tempo observa-se uma aproximação ao ponto fixo hiperbólico γ ao longo da variedade estável, como denotado pelos pontos 1, 2 e 3, respectivamente na Figura 2.5(a). De forma análoga, ao iterar o ponto O para trás observa-se a aproximação ao ponto fixo hiperbólico γ , através dos pontos -1 , -2 e -3 ao longo da variedade instável.

Assim, as sucessivas iterações, representadas na Figura 2.6, ficam cada vez mais alongadas e retorcidas, uma vez que, os pontos localizados sobre os cruzamentos das variedades estáveis e instáveis ficam cada vez mais próximos.

Esse efeito de alongar e esticar faz com que pontos inicialmente próximos sejam conduzidos a posições ora distantes ora muito próximas, e isso pode ser traduzido como

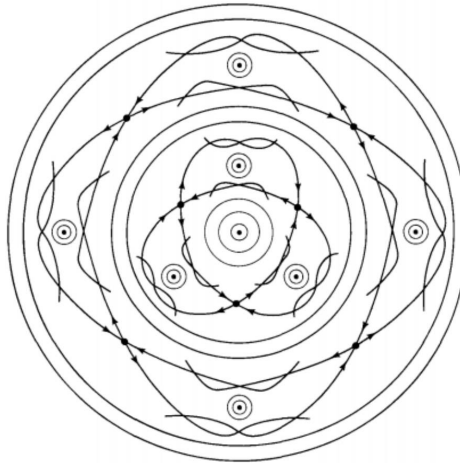


FIGURA 2.6 – Emaranhamento homoclínico devido a alongação e esticamento das variedades estáveis e instáveis [57].

o surgimento da sensibilidade às condições iniciais. Portanto, o emaranhamento homoclínico, formados pelas variedades estáveis e instáveis, são os mecanismos responsáveis pelo surgimento de caos em sistemas dinâmicos.

CAPÍTULO 3 - Interação onda-partícula em física de plasma via dinâmica Hamiltoniana

Este capítulo destina-se à descrição fundamental acerca da interação ressonante onda-partícula, que é o tema central desta tese. Esse tipo de interação está presente em diversos sistemas, tais como, astrofísicos [62–64], aceleradores de partículas [65], lasers de elétrons livres [66, 67], autorressonância ciclotrônica [68, 69], transmissão de correntes em dispositivos de fusão [70] entre outros. Nas próximas seções, entretanto, limitamos nossa discussão no que se refere aos fundamentos básicos da interação onda-partícula na física de plasma. Além disso, direcionaremos a descrição utilizando dinâmica Hamiltoniana clássica. Plasmas são meios altamente complexos, especialmente quando magnetizados, e exibem comportamento coletivo. A vibração coletiva dos elétrons no plasma dá origem ao modo mais fundamental que pode se propagar num plasma, denominado *modo de Langmuir*. No contexto da teoria cinética de plasma, a descrição da interação das ondas de Langmuir com as partículas carregadas do plasma, envolve a solução do conjunto de equações acopladas de Vlasov-Poisson, para uma função de distribuição de velocidades de elétrons. Entretanto, nesta tese focamos na descrição através do formalismo Hamiltoniano clássico apresentado na referência [29], que descreve de forma autoconsistente a interação entre elétrons ressonantes com ondas de Langmuir. Nesta abordagem considera-se um plasma unidimensional e periódico constituído de N -partículas eletricamente carregadas (íons e elétrons), no qual a dinâmica dos íons seja contabilizada apenas para compor a neutralidade macroscópica de carga no sistema, devido sua massividade em relação aos elétrons¹. Apenas os aspectos eletrostáticos do movimento são contemplados, tal que a velocidade das partículas (paralela ao campo magnético) é muito menor que a velocidade da luz e, então, a descrição está no limite da mecânica clássica.

3.1 Propriedades gerais de plasmas

De forma simplificada, um plasma pode ser descrito como um gás ionizado, composto por elétrons, íons e partículas neutras, que apresentam um comportamento coletivo devido às interações eletromagnéticas preponderantes entre as partículas carregadas. O termo *plasma*, foi utilizado pela primeira vez por Tonks e Langmuir, em 1929, para descrever a região interna de um gás ionizado e brilhante que se moldava à forma do tubo onde era produzido. Por possuir propriedades diferentes dos estados sólido, líquido e gasoso, o plasma é considerado como um quarto estado da matéria [4].

¹Se os íons tem massa suficiente, a dinâmica do plasma pode ser descrita sem levar em consideração os íons por sua ação sobre os elétrons ou por sua própria dinâmica. Tais simplificações omitem a visualização de efeitos, como o acoplamento de ondas de Langmuir com ondas íons-acústicas ou sua auto-modulação em alta intensidade. Outra consequência da aproximação unidimensional é o fato que as colisões devido ao potencial de Coulomb são mais fracas em uma dimensão do que em três, de modo que, por exemplo, quando duas partículas se cruzam a força entre elas pode apenas mudar de sinal no momento do cruzamento.

A diferença básica entre os estados físicos da matéria está nas ligações intermoleculares que mantêm os constituintes dos átomos e moléculas unidos. Essas ligações estão diretamente relacionadas à temperatura e à pressão em que determinada substância é submetida. À medida que fornecemos calor a uma substância, aumentamos a energia cinética dos átomos e moléculas. Como consequência, se o fornecimento de energia for ininterrupto, as ligações intermoleculares são rompidas e a substância sofre uma transição de fase, que sabidamente acontece a uma temperatura constante para um dado valor de pressão. No entanto, a transição do estado gasoso para o estado de plasma acontece proporcionalmente com o aumento da temperatura do sistema. Não sendo, portanto, uma transição de fase do ponto de vista termodinâmico.

A relação entre a temperatura e o grau de ionização do plasma no equilíbrio, pode ser obtida pela Equação de Saha:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-u_i/k_B T), \quad (3.1)$$

onde n_i é a densidade dos átomos ionizados, n_n é a densidade dos átomos neutros, T é a temperatura do sistema em unidades de energia, k_B é a constante de Boltzmann e u_i é a energia de ionização do gás [5].

Outras formas de produzir plasmas é por meio de fotoionização e por descarga elétrica. O processo de produção por fotoionização consiste em incidir fótons com energia igual ou maior do que o potencial de ionização dos átomos de um gás. Dessa forma, o átomo absorve o fóton e o excesso da energia do fóton é transformado em energia cinética, que pode romper a energia de ligação intermolecular e dar origem a um par de elétron-íon. A produção de plasmas por descarga elétrica consiste na aplicação de um campo elétrico externo a um gás pouco ionizado, de forma que os elétrons livres sejam acelerados até altos níveis de energia para ionizar os outros átomos do gás por meio de colisões [4].

Além da existência dos plasmas laboratoriais, conforme descrito acima, existem ainda os plasmas naturais, dentre os quais incluem-se os plasmas espaciais, que constituem a maior parte (99%) da matéria conhecida no universo. Isso inclui quase que a totalidade da matéria solar, incluindo-se a sua “atmosfera”, o vento solar, que compreende toda a heliosfera, a maioria das estrelas, e uma fração significativa do meio interestelar [71].

A distinção entre um gás neutro e um plasma pode ser feita observando a existência de partículas carregadas, presentes no plasma. Entretanto, nem todo gás ionizado pode ser considerado como um plasma. A existência do estado de plasma requer que o sistema formado pelo gás ionizado obedeça alguns critérios, que são chamados de *critérios para definição de*

plasma. Um dos critérios que deve ser obedecido pelo sistema é o da *quase-neutralidade macroscópica*. Essa condição implica que se consideramos um elemento de volume no sistema, a diferença entre as densidades de partículas carregadas positivamente e negativamente deve ser apenas uma flutuação, de forma que as cargas elétricas de sinais contrários, fortemente acopladas, se neutralizam a uma distância pequena. A incidência de um campo elétrico externo, por exemplo, interfere no equilíbrio do plasma, estabelecendo uma nova redistribuição espacial das cargas. Devido à boa condutividade elétrica do plasma, as cargas se rearranjarão de modo que o plasma é capaz de blindar o campo externo. Esse fenômeno, característico no plasma, é conhecido como *blindagem de Debye* e a distância em que a influência desse campo será efetiva sobre as cargas é chamada de *comprimento de Debye*:

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_e e^2} \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Essa característica impõe que para existência de plasmas é necessário que a dimensão do sistema, L , deve ser muito maior do que o comprimento de Debye, λ_D :

$$L \gg \lambda_D. \quad (3.3)$$

O volume esférico delimitado por um raio igual ao comprimento de Debye, no interior do plasma, é denominado de *esfera de Debye*. Isso implica que a interação entre as cargas elétricas dentro do plasma é limitada às partículas que estão dentro da esfera de Debye. Para que a blindagem seja efetiva é necessário que a densidade de elétrons dentro da esfera de Debye seja suficientemente grande, dessa forma, se estabelece um outro critério para definição de plasma:

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1. \quad (3.4)$$

A distância entre as partículas dentro desse volume esférico deve ser pequena comparada com o comprimento de Debye. Ainda assim, a dinâmica de interação eletromagnética de longo alcance deve predominar sobre as interações colisionais.

A condição (3.4) pode ser reescrita definindo-se:

$$g = \frac{1}{n_e \lambda_D^3}. \quad (3.5)$$

A quantidade g definida acima é conhecida como *parâmetro de plasma*, o qual fornece as informações entre as razões da energia potencial eletrostática e cinética, e, de como os efeitos das interações que ocorrem no plasma influenciam no comportamento individual das partículas. A condição $g \ll 1$ é chamada de *aproximação de plasma* [4].

O alcance efetivo dessas interações é um conceito estatístico baseado em valores médios. Isso implica que, em um plasma neutro, predominam os campos flutuantes, responsáveis pelas interações eletromagnéticas de médio e longo alcance, o que caracteriza um *comportamento coletivo* entre as partículas do plasma [72]. Esse comportamento coletivo surge devido à movimentação de cargas no plasma, como uma tentativa de compensar as flutuações e reestabelecer a neutralidade. O deslocamento de cargas no plasma e a tentativa de retorno ao estado de equilíbrio são acompanhadas por uma diversidade de modos oscilatórios. O mais fundamental desses modos está associado ao deslocamento dos elétrons da posição de equilíbrio. Esse modo de oscilação com frequência bem definida é denominado frequência eletrônica de plasma, ou simplesmente *frequência de plasma*:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

As colisões entre os elétrons e as partículas neutras do plasma tendem a amortecer essas oscilações. Dessa forma, para que a dinâmica colisional não seja predominante no sistema, é necessário que a frequência de oscilações do plasma seja muito maior que a frequência de colisão entre as partículas:

$$\nu_{pe} \gg \nu_{en}, \quad (3.7)$$

onde $\nu_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$ é a frequência de plasma, e ν_{en} é a frequência de colisão entre os elétrons e as partículas neutras. Essa condição implica em um importante critério para definição de plasma, uma vez que a interação colisional entre os elétrons com as partículas neutras faz com que estas partículas entrem em equilíbrio entre si. Consequentemente, o sistema é conduzido ao equilíbrio termodinâmico.

Esse critério pode ser escrito também da seguinte forma:

$$\omega_{pe} \tau \gg 1, \quad (3.8)$$

onde $\tau = 1/\nu_{en}$ representa o tempo médio entre as colisões binárias.

Essa condição estabelece que os fenômenos ondulatórios que ocorrem no plasma devem ser caracterizados por um período de oscilação muito menor do que o intervalo de tempo típico de colisões.

3.2 Descrição de plasma

Uma vez estabelecidos os critérios fundamentais de plasmas, podemos estudar a dinâmica desse sistema, seguindo basicamente três teorias principais de plasma, a saber, teoria

de órbitas (partículas individuais), teoria cinética (discretas-espécies de partículas) e teoria de fluidos (contínuo - todas as partículas), onde cada uma estabelece suas aproximações e regimes de validade. A escolha da teoria a ser utilizada deve ser feita de acordo com as características do sistema e os fenômenos que se pretende estudar.

A Teoria de órbitas destina-se, basicamente, à descrição do movimento de cada partícula carregada do plasma na presença de campos elétricos e magnéticos previamente especificados (externos). Nessa abordagem, os campos eletromagnéticos criados pelo movimento das partículas (campos autoconsistentes) não são considerados. Essa teoria é, essencialmente, importante na descrição do comportamento das partículas em plasmas rarefeitos (baixa densidade), nos quais, a interação partícula-campo predomina em relação às colisões.

Já na Teoria cinética, a descrição é realizada considerando-se uma função de distribuição de velocidades das partículas no plasma. Nessa descrição, resolve-se as equações diferenciais cinéticas apropriadas que governam a evolução temporal e espacial das variáveis microscópicas para cada espécie de partícula. As variáveis microscópicas são definidas por médias estatísticas sobre a função de distribuição de velocidades, denominadas, momentos da função de distribuição de velocidades.

Na Teoria de fluidos o plasma é tratado como um fluido condutor onde o comportamento macroscópico é descrito como um todo, sem considerar o movimento individual de cada partícula, então, as variáveis macroscópicas são definidas pela soma das contribuições de cada espécie de partícula. A união das equações da mecânica de fluidos com as equações de Maxwell do eletromagnetismo fornece uma abordagem teórica para os fenômenos de plasma conhecido como teoria Magnetohidrodinâmica (MHD).

3.2.1 Descrição de plasma via dinâmica Hamiltoniana clássica

Nessa descrição vamos considerar a propagação das ondas de Langmuir em um plasma unidimensional e periódico ao longo de uma coluna de plasma magnetizada com uma grande seção transversal tal que a dinâmica pode ser estudada considerando apenas suas interações mútuas.

No que segue, podemos considerar ainda o plasma como um sistema mecânico unidimensional periódico constituído de N —partículas com mesma carga, q_e , e massa, m_e , via interação de Coulombiana, em um domínio de comprimento $L \gg \lambda_D$ com condições de contorno periódicas². Dessa forma, podemos escrever a Hamiltoniana desse sistema como a soma da energia cinética das partículas, K , mais um termo que descreve o potencial da interação

²Em três dimensões isso corresponderia a N planos paralelos por período espacial L , cada um com uma razão carga-massa, q_e/m_e , movendo-se em uma direção perpendicular comum.

devido as ondas

$$H = K + V, \quad (3.9)$$

que, conforme discutimos no capítulo 2, o valor da Hamiltoniana corresponde à energia total do sistema, quando o valor de H não depende explicitamente do tempo. Nesse caso, o termo correspondente à energia cinética das partículas é dado por

$$K = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2m}, \quad (3.10)$$

enquanto que o termo do acoplamento onda-partícula devido ao potencial eletrostático das ondas é dado por

$$V = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,r=1}^N q_e^2 V_n \cos k_n(x_r - x_l), \quad (3.11)$$

com condições de contorno periódicas no intervalo de comprimento L . O pré-fator $1/N$ no potencial acima evita divergências que ocorreriam no caso limite quando $N \rightarrow \infty$, de forma que quando $N \rightarrow \infty$ é garantido que a frequência do plasma mantém-se constante. V_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier do potencial inter-partículas associado ao vetor de onda $k_n = 2\pi n/L$ e x_r é a posição da partícula r , com $p_r = m\dot{x}_r$.

As expressões (3.10) e (3.11) fornecem uma maneira compacta de descrever a dinâmica no plasma. Na realidade, como H é a Hamiltoniana do sistema, então, podemos obter as Equações de movimento do sistema a partir de

$$\dot{x}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial x_r}, \quad (3.12)$$

de forma que

$$\dot{x}_r = \frac{p_r}{m}, \quad (3.13)$$

$$\dot{p}_r = \frac{q_e}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^N q_e k_n V_n \sin k_n(x_r - x_l), \quad (3.14)$$

onde p_r é o momento canônico conjugado à x_r .

Agora, definindo que o campo autoconsistente seja dado por

$$E_n = \frac{q_e k_n V_n}{2iN} \sum_{r=1}^N \exp(-ik_n x_r), \quad (3.15)$$

onde $k_n = -k_{-n}$, $V_{-n} = V_n$, $V_0 = 0$, de forma que a dinâmica ocorre em escala espacial L/n , tal que, podemos escrever

$$\ddot{x}_r = \frac{q_e}{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \exp(ik_n x_r), \quad (3.16)$$

onde $\ddot{x}_r = -\partial V / \partial x_r$ é a equação de movimento do sistema de segunda ordem, e, a evolução temporal de E_n é regida pela Equação (3.15). Assim, obtemos que o movimento das N -partículas do plasma pode ser descrito como uma coleção de problemas de uma única partícula sujeita a um campo elétrico autoconsistente E_n com $n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$, que pode ser interpretado como as componentes de Fourier do campo elétrico devido a todas as partículas.

O campo elétrico definido em (3.15) é uma ferramenta conveniente que caracteriza a ação de $N - 1$ partículas do plasma sobre uma delas. Além disso, a dinâmica campo-partícula é intrinsecamente autoconsistente, uma vez que o campo é criado pelo movimento das partículas.

As condições de contorno periódicas e a necessidade de neutralidade global do plasma levam a uma peculiaridade técnica do modelo. Conforme discutimos anteriormente, nessa formulação, a dinâmica efetiva é restrita a uma única espécie de partículas do plasma³, de forma que os íons compõem um fundo neutralizante uniforme. Dessa forma, uma imposição proveniente de tais particularidades estabelece que o potencial V_n seja escrito como

$$V_n = \frac{2}{L\epsilon_0 k_n^2}, \quad n \neq 0. \quad (3.17)$$

Em geral, os modelos unidimensionais são amplamente úteis, tanto para estudos elementares quanto avançados.

3.3 Ressonância onda-partícula: um paradigma da mecânica clássica

Para um sistema com um grande número de partículas, $N \gg 1$, o movimento de uma partícula individual tem pouca ação sobre a onda podendo ser considerada como uma partícula teste submetida à onda. Assim, vamos considerar, por ora, a dinâmica de uma partícula teste submetida a um potencial eletrostático que oscila sinusoidalmente na direção de uma coorde-

³Os sistemas formados por plasma de uma única componente é comumente referenciados na literatura como “jellium”.

nada q , onde a análise é realizada no referencial de repouso de uma onda de Langmuir.

Com uma escolha apropriada de unidade e de origem para a coordenada q , a equação de movimento de um elétron neste potencial é dada por

$$\ddot{q} = -A \sin(q), \quad (3.18)$$

com $A > 0$. A Equação (3.18) é similar a equação que descreve o movimento de um pêndulo de comprimento l em um campo gravitacional com aceleração g , quando $A = g/l$. No caso do pêndulo q corresponde ao ângulo de abertura vertical, tal que $q = 0$ coincide com a posição de equilíbrio estável.

A Hamiltoniana que corresponde soma das energias cinética $p^2/2$ e potencial $-A \cos(q)$ do sistema é dada então, por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - A \cos(q), \quad (3.19)$$

onde p é o momento linear da partícula ou momento angular no caso do pêndulo e, por simplicidade normalizamos a massa do elétron, m_e , ou momento de inércia do pêndulo, ml^2 , igual a unidade.

As Equações de movimento do sistema, a partir de (3.19) são dadas por

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad (3.20)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -A \sin(q). \quad (3.21)$$

Conforme discutimos no capítulo anterior a dinâmica da Hamiltoniana (3.19) a partir das Equações de movimento (3.20) e (3.21), pode ser analisada através das trajetórias num espaço (q, p) , denominado espaço de fase. Como em ambos os casos as condições de contorno para q são periódicas, então o espaço de fase é equivalente a um cilindro com base circular de comprimento $\Delta q = 2\pi$, tal que a dinâmica passa ser descrita em um espaço de fase bidimensional.

Outro fator importante acerca do formalismo Hamiltoniano é que como H não depende explicitamente do tempo, então as trajetórias no espaço de fase ocorrem sob superfícies com energia $E = H = \text{constante}$. Além disso, como H é uma constante de movimento independente e o sistema possui apenas um grau de liberdade, então, a dinâmica é integrável, e consequentemente, as Equações de movimento podem ser resolvidas por quadratura, expressando p como uma função $p_1(q)$ para um dado valor de energia e condições iniciais para (q_0, p_0) .

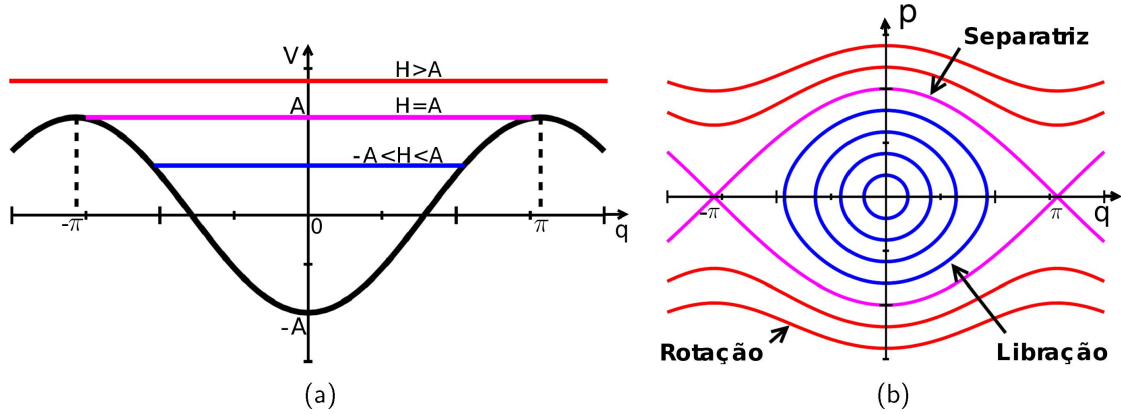


FIGURA 3.1 – (a) potencial multiperiódico $V(q)$ com amplitude $A \bmod 2\pi$. As linhas vermelha, magenta e azul mostram os níveis de energia total, H , em relação à amplitude A do potencial. (b) retrato de fase (q, p) mostrando os tipos de trajetórias de acordo com a variação de H . A separatriz (trajetória magenta) separa os tipos de movimento no espaço de fase. O valor de H da separatriz está indicado pela linha magenta em (a). As trajetórias em azul, que ocorrem no regime de H especificado na linha azul em (a), mostra que o movimento é limitado a uma região do espaço de fase que coincide com “largura da” separatriz. As trajetórias vermelhas mostram que além da separatriz, no regime de H mostrado na linha vermelha em (a), o sistema descreve um movimento quase balístico (ou partícula livre).

Analogamente à dinâmica do pêndulo, podemos inferir qualitativamente acerca da interação onda-partícula no retrato de fase (q, p) , conforme ilustrado na Figura 3.1. Observe que a natureza do movimento depende do valor da energia total $E = H$ do sistema, de forma que a variação de H implica diretamente nas mudanças topológicas do retrato de fase.

Para valores de $H > A$ (linha vermelha na Fig. 3.1(a)), as trajetórias em $p_1(q)$ nunca se anulam, ou seja, p nunca passam por $p = 0$, mas oscilam ao longo de q com um sinal definido. Esse movimento é representado pelas trajetórias em vermelho na Figura 3.1(b). Observe ainda que um determinado valor de H pode corresponder a dois valores opostos para $p_1(q)$, dependendo apenas do sinal da condição inicial em q_0 . Na dinâmica do pêndulo, as trajetórias vermelhas na Fig. 3.1(a) com $H > A$ correspondem ao movimento de rotação do pêndulo, enquanto que na interação onda-partícula, tais trajetórias representam o *movimento de partícula livre*, ou seja, quando a partícula oscila sem interagir efetivamente como a onda.

Para valores de $-A < H < A$ (linha azul na Fig. 3.1(a)), as trajetórias $p_1(q)$ se anulam para dois valores de q . Esse movimento é representado pelas trajetórias em azul na Figura 3.1(b). Observe também que quando p passa por $p = 0$ o valor em q é máximo. As trajetórias com $H = \text{cte}$ definem uma curva fechada no retrato de fase, semelhante a uma elipse, e, o movimento de $p_1(q)$ é periódico em q . Na dinâmica do pêndulo, as trajetórias azuis na Fig. 3.1(a) com $-A < H < A$ correspondem ao movimento de libração do pêndulo, enquanto que na interação onda-partícula, tais trajetórias representam o *movimento de aprisionamento*.

(*trapping*), ou seja, quando a partícula oscila no intervalo de potencial estável da onda. A auto-consistência garante que, quando p passa por $p = 0$, o potencial tem valor máximo e, então, na interação a partícula ganha energia da onda. Por outro lado, quando q passa por $q = 0$, a partícula tem momento (energia cinética) máximo e, portanto, a onda ganha energia da partícula na interação.

Quando $H = -A$ com $q = p = 0$, mod 2π , o sistema encontra-se em *equilíbrio estável*. Assintoticamente a este ponto, o $\cos(q)$ pode ser aproximado através de uma expansão de segunda ordem em q . Isso resulta num oscilador harmônico Hamiltoniano com frequência

$$\omega = \sqrt{A}. \quad (3.22)$$

Portanto, perto de O (origem) o movimento oscila quase-harmonicamente e a trajetória tem o formato de uma elipse.

Outra situação de equilíbrio ocorre quando $H = A$ com $p = 0$ e $q = \pi$ (linha magenta na Fig. 3.1(a)), mod 2π . Nessa configuração o sistema encontra-se em *equilíbrio instável*. Assintoticamente ao ponto instável (ponto- X) as órbitas assemelham-se a ramos de hipérbolas e, em geral, o movimento diverge a partir deste ponto. A taxa de divergência é chamada de expoente de Lyapunov do ponto- X [29]

$$\lambda_X = \sqrt{A}. \quad (3.23)$$

No espaço de fase o conjunto de pontos definido por $H(p,q) = A$ corresponde a duas sinusoidais

$$p_1(q) = \pm 2A^{1/2} \cos(q/2), \quad (3.24)$$

que passam, assintoticamente, pelo ponto- X quando $t \rightarrow \infty$. Essa trajetória é chamada de separatriz e, está representada na Figura 3.1(b) pela trajetória magenta. Observe na figura que perto do ponto- X a separatriz tem o formato de um X , por isso chamamos o ponto instável de ponto- X . A separatriz separa os domínios do movimento de libração (ou partícula aprisionada) do movimento de rotação (ou partícula livre) no espaço de fase. Por conseguinte, a separatriz pode ser rotulada como um conjunto de órbitas limitadas (movimento de rotação) com períodos infinitos ou como o conjunto de órbitas ilimitadas (movimentação de libração) com velocidade média evanescente [29].

A Figura 3.1(b) mostra ainda que o conjunto das trajetórias com movimento de rotação desaparece com A : assim, recaímos no movimento de uma partícula livre. Atribuir um

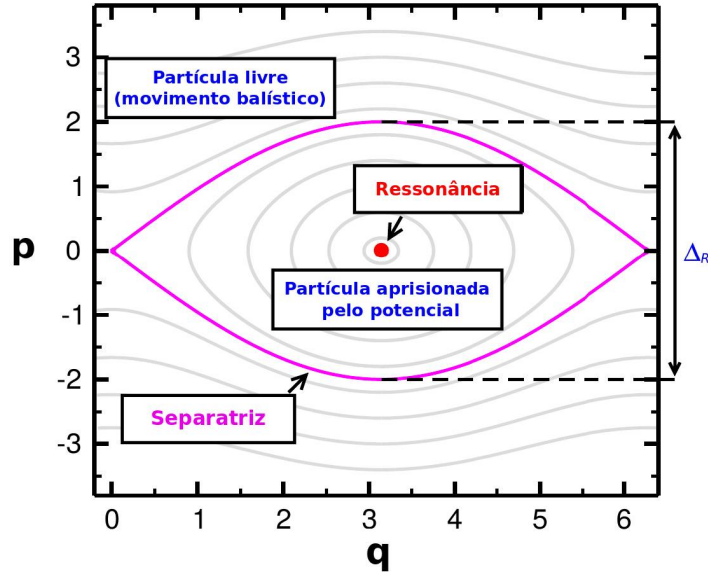


FIGURA 3.2 – Largura da ressonância Δ_R , delimitada pela separatriz. As trajetórias abertas representam o movimento de partícula livre, ou seja, de partículas que não estão em ressonância com a onda, enquanto que as trajetórias elípticas, limitadas pela separatriz, representam o movimento de partículas que estão em ressonância com a onda, aprisionadas ao potencial estável da onda.

valor finito à A é como “rasgar” o espaço de fase do movimento livre⁴. As órbitas “livres” são distorcidas e se tornam órbitas de “passagem”, de forma que dentro deste “corte” um novo conjunto de órbitas estão presentes: as órbitas “aprisionadas”. O domínio, no espaço de fase que contém o novo conjunto de órbitas aprisionadas assume a forma semelhante a de um “olho de gato” com meia largura igual a

$$\Delta_R = 2\sqrt{A}, \quad (3.25)$$

denominado, *largura de ressonância* ou largura do aprisionamento da onda, conforme exemplifica a Figura 3.2. Todos os elétrons cujo movimento é descrito através de uma trajetória limitada, têm velocidade média próxima da velocidade de fase da onda, tal que, o tamanho finito da separatriz define o conjunto de tais órbitas com média positiva. Isso significa dizer que, os elétrons nesse domínio estão em *ressonância* com a onda.

A *ressonância onda-partícula* pode ser identificada mesmo se houver mais de uma onda, e se a auto-consistência da interação for levada em consideração. Uma estrutura ressonante no espaço de fase (em particular com largura em p proporcional a $A^{1/2}$) pode ser identificada na dinâmica de diversos sistemas, a partir de uma função Hamiltoniana semelhante à (3.19), com uma parte $H_0(p)$ que é não linear em p mais o termo sinusoidal em q

⁴Esse fenômeno está associado aos modos que geram as chamadas ilhas magnéticas no confinamento magnético de plasma [73].

com amplitude $V(p)$. Portanto, a ressonância onda-partícula é o paradigma das ressonâncias não lineares na mecânica clássica.

CAPÍTULO 4 - Formalismo Hamiltoniano da interação autoconsistente onda-partícula

Este capítulo fornece uma breve descrição, em grande parte, intuitiva do formalismo Hamiltoniano autoconsistente onda-partícula que empregamos nesta tese. A interação onda-partícula é típica em muitos sistemas físicos e, nesta tese, em particular, investigamos como o acoplamento, dado pela Hamiltoniana da referência [29], afeta a dinâmica das partículas conforme aumentamos o número de graus de liberdade no sistema. Em nossas análises consideramos a interação na aproximação de uma única onda, largamente utilizada no estudo de instabilidades e caos em baixa dimensão. Para uma derivação completa do formalismo Hamiltoniano que apresentaremos a seguir o leitor é convidado a consultar o capítulo 2 da referência [29].

4.1 Derivação intuitiva da Hamiltoniana para um plasma de elétrons

Nesta derivação intuitiva da Hamiltoniana autoconsistente, tomemos como certo a existência de ondas de Langmuir se propagando na região de partículas não ressonantes no plasma, denotada como o *bulk* da função de distribuição de velocidades, devido à vibração coletiva destas partículas. Assumimos ainda que, a relação de dispersão, dada pela relação de dispersão de Bohm-Gross¹

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_T^2 + \dots \quad (4.1)$$

é conhecida. Uma expansão da Hamiltoniana (3.19) nos permite representar a dinâmica de R partículas independentes, pertencentes à região da cauda da função de distribuição de velocidades, em um campo constituído de M ondas longitudinais, cuja propagação é dada através da seguinte função Hamiltoniana

$$H_{nsc} = \sum_{r=1}^R \frac{p_r^2}{2m} - \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M W_j \cos(k_j x_r - \omega_{j0} t - \theta_{j0}), \quad (4.2)$$

onde k_j e ω_{j0} estão relacionadas através da relação de dispersão de Bohm-Gross (4.1) e W_j é a amplitude do potencial (que incorpora a carga das partículas) da onda j com fase θ_{j0} . Como estamos interessados na descrição das ondas de Langmuir, via argumentos da mecânica clássica, é natural que as consideremos a partir de agora como osciladores harmônicos, correspondentes aos elétrons do *bulk*. Dessa forma, escrevemos a Hamiltoniana destes osciladores

¹A relação de dispersão de Bohm-Gross fornece a primeira ordem nas correções térmicas às ondas de Langmuir.

como

$$H_{harm} = \sum_{j=1}^M \omega_{j0} I_j, \quad (4.3)$$

onde a ação da onda, I_j , é proporcional a sua energia. Logo, o ângulo conjugado à ação I_j evolui com

$$\theta_j = \omega_{j0} t + \theta_{j0}. \quad (4.4)$$

Considerando ainda que, a energia eletrostática de uma onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude, então é natural que existe alguma constante c_j , tal que

$$W_j = c_j \sqrt{I_j}. \quad (4.5)$$

Dessa forma, podemos escrever a Hamiltoniana completa da interação autoconsistente onda-partícula como

$$H_{Wp} = \sum_{r=1}^R \frac{p_r^2}{2m} + \sum_{j=1}^M \omega_{j0} I_j - \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M c_j \sqrt{I_j} \cos(k_j x_r - \omega_{j0} t - \theta_j). \quad (4.6)$$

A combinação das equações de movimento de p_r e I_j , nos permite escrever o momento linear total como

$$P = \sum_{r=1}^R p_r + \sum_{j=1}^M k_j I_j, \quad (4.7)$$

que, assim como a energia total, também, é uma constante de movimento do sistema. Observe que, uma vez que o primeiro termo do lado direito da Equação (4.7) é a contribuição das partículas para o momento total, então, o segundo termo deve ser interpretado como a contribuição das ondas para o momento total, de forma que, o momento da onda é proporcional à amplitude W_j^2 , assim como, o vetor de Poynting na eletrodinâmica [9].

4.2 Forma final da Hamiltoniana autoconsistente onda-partícula

A partir de agora, vamos denotar como N o número de partículas que interage de forma autoconsistente com as M ondas de Langmuir. Na seção anterior tais partículas estavam referenciadas como R . Essa mudança na notação é requerida, devido a necessidade de associar ao número total $N \gg 1$ de partículas no comprimento L do plasma um pequeno parâmetro

dado por

$$\varepsilon = \omega_p \sqrt{\frac{2m\eta}{N}} \quad (4.8)$$

onde η definido por $\eta \equiv R/N \ll 1$ estabelece até que ponto a fonte ressonante é importante para as ondas. No entanto, o parâmetro η não é crucial para a derivação da dinâmica autoconsistente onda-partícula que objetivamos nesta formulação, tal que podemos escrever

$$\varepsilon = N^{-1/2} q_* k_n V_n^{1/2} = \frac{2q_*}{\sqrt{L\epsilon_0 N}} = \omega_p \sqrt{\frac{2m}{N}}. \quad (4.9)$$

Os números de onda k_j das M ondas de interesse podem, ocasionalmente, ser restritos a um intervalo menor do que o total $0 < k_j \ll k_D$. Em particular, o modelo de uma única onda $M = 1$ (*single wave model -SWM*) ocorre naturalmente no estudo de instabilidades, de forma que: se vários modos instáveis coexistem no plasma, o de crescimento mais rápido normalmente se torna dominante sobre os outros.

Definindo $m = 1$, temos, então, que dinâmica autoconsistente das N partículas idênticas movendo-se no intervalo de comprimento L com condições de contorno periódicas, interagindo com M ondas longitudinais com números de onda $k_j = j2\pi/L$ e frequências naturais ω_{0j} , é descrita pela Hamiltoniana [8, 29]

$$\begin{aligned} H_{sc}^{N,M} &= \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} + \sum_{j=1}^M \omega_{0j} \frac{X_j^2 + Y_j^2}{2} + \varepsilon \sum_{r=1}^N \sum_{j=1}^M k_j^{-1} \beta_j (Y_j \sin k_j x_r - X_j \cos k_j x_r) \\ H_{sc}^{N,M} &= \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} + \sum_{j=1}^M \omega_{0j} I_j - \varepsilon \sum_{r=1}^N \sum_{j=1}^M k_j^{-1} \beta_j \sqrt{2I_j} \cos(k_j x_r - \theta_j) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde β_j é uma constante de acoplamento definido em termos da função dielétrica $\epsilon(k_n, \omega_n)$,

$$\beta_j = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}(k_n, \omega_n) \right). \quad (4.11)$$

As equações que governam a evolução do sistema, obtidas a partir das Equações de

movimento de Hamilton da Hamiltoniana (4.10) são dadas por

$$\dot{x}_r = p_r \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \varepsilon \Re \left(\sum_{j=1}^M i \beta_j Z_j e^{ik_j x_r} \right) \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^M i \beta_j \sqrt{2l_j} \sin(k_j x_r - \theta_j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\dot{Z}_j = -i\omega_{j0} Z_j + i\varepsilon \beta_j k_j^{-1} \sum_{r=1}^N e^{-ik_j x_r} \quad (4.14)$$

onde $Z_j = X_j + iY_j$, e

$$\dot{\theta}_j = \omega_j = \varepsilon \sum_{j=1}^M i \beta_j \sqrt{2l_j} \cos(k_j x_r - \theta_j) \quad (4.15)$$

$$\dot{l}_j = \sum_{j=1}^M i \beta_j \sqrt{2l_j} \sin(k_j x_r - \theta_j). \quad (4.16)$$

As coordenadas generalizadas são dadas pelas posições das partículas x_r e pela fase das ondas θ_j , com seus respectivos momentos conjugados dados pelo momento da partícula p_r e pela intensidade das ondas l_j . Na formulação fasor, as coordenadas generalizadas das ondas são dadas por X_j , com momento conjugado Y_j .

Na Hamiltoniana (4.10) a dinâmica pode ser decomposta em três partes onde: o primeiro termo, descreve o movimento das partículas sem a influência do potencial, tal que o movimento das partículas possa ser considerado como de partícula livre (movimento balístico); o segundo termo descreve o potencial associado as ondas como M osciladores harmônicos acoplados com frequência ω e, por fim, o terceiro termo que, de fato, contém toda a informação do acoplamento, onde a energia do acoplamento é dada por um potencial periódico e a amplitude do potencial é proporcional a intensidade das ondas.

Nessa formulação, a Hamiltoniana (4.10) é invariante sob translação temporal e espacial, de forma que a energia total $E = H_{sc}^{N,M}$ e o momento total $P = \sum_{r=1}^N p_r + \sum_{j=1}^M k_j l_j$ são constantes de movimento independentes. A conservação do momento total assegura que o crescimento (ou amortecimento) das ondas é diretamente equilibrado com a aceleração (ou desaceleração) das partículas. É importante destacar ainda que a auto-consistência nesta abordagem ocorre apenas devido a troca de momento onda-partícula, de modo que as interações partícula-partícula e onda-onda não são contempladas nessa descrição.

4.3 Aproximação para a dinâmica com uma única onda

Na aproximação de uma única onda, considera-se que a instabilidade ocorre ao longo do modo mais instável, tal que, os demais modos intensificados na interação podem ser negligenciados. Essa consideração é facilmente verificada durante o regime linear, quando a amplitude da onda cresce e aprisiona um feixe de partículas, por exemplo [36].

Após a saturação do regime linear, a amplitude da onda começa oscilar e o feixe começa oscilar no potencial estável da onda. A partir desse momento, modos com número de onda próximos ao da onda inicial começam crescer e, eventualmente, podem atingir amplitudes comparadas às da onda inicial [28]. No entanto, se considerarmos que o sistema possui tamanho finito, tal que, as ondas amplificadas após a saturação do regime linear possuem números de ondas proibidos pela condição de contorno, então, a aproximação para uma onda permanece válida, mesmo após a dinâmica atingir o regime não linear [28].

Por conseguinte, focamos, então, nossa discussão considerando uma única espécie de partículas, onde todas as partículas têm a mesma massa, e redimensionamos o tempo e a energia para definir a constante de acoplamento $\varepsilon\beta_j$ e a massa das partículas m igual à unidade na Eq. (4.10). No modelo de onda única ($M = 1$), omitimos o subscrito j e definimos a unidade de comprimento para k^{-1} e o período espacial para $L = 2\pi$, o que reduz a Hamiltoniana para

$$H_{sc}^N = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} + \omega_0 I - \sqrt{2I} \sum_{r=1}^N \cos(x_r - \theta). \quad (4.17)$$

Uma transformação de Galileo nos permite colocar o sistema no referencial da onda. Com a função geradora

$$F_1(x, \theta, \bar{p}, \bar{I}, t) = \sum_{r=1}^N (x_r - \omega_0 t)(\bar{p}_r + \omega_0) + (\theta - \omega_0 t)\bar{I} - N\omega_0^2 t/2, \quad (4.18)$$

a Hamiltoniana (4.17) torna-se

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{I}, \bar{x}, \bar{\theta}) = H_{sc}^N + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \sum_{r=1}^N \frac{\bar{p}_r^2}{2} - \sqrt{2\bar{I}} \sum_{r=1}^N \cos(\bar{x}_r - \bar{\theta}). \quad (4.19)$$

O momento total

$$\bar{P} = \sum_{r=1}^N \bar{p}_r + \bar{I} \quad (4.20)$$

é conservado pela dinâmica obtida a partir da Eq. (4.15). Isso nos permite definir uma nova

função geradora $F_2(\bar{x}, \bar{\theta}, p', I') = I'\bar{\theta} + \sum_{r=1}^N p'_r(\bar{x}_r - \bar{\theta})$: a nova coordenada conjugada a $p'_r = \bar{p}_r$ é $x'_r = \partial F_2 / \partial p'_r = (\bar{x}_r - \bar{\theta})$, que denotamos como $y_r = x'_r$, e o novo momento conjugado a $\theta' = \bar{\theta}$ é $I' = \bar{P}$. Este último é uma constante de movimento, de modo que o novo ângulo $\theta' = \bar{\theta}$ é uma coordenada cíclica. A Hamiltoniana final, enfatizando que apenas N graus de liberdade são efetivos, é dada na forma compacta

$$H(y, p) = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} - \sqrt{2I} \sum_{r=1}^N \cos y_r, \quad (4.21)$$

onde, para simplificar a notação, retiramos a notação com a apóstrofe de p'_r e as barras de $\bar{I} = \bar{P} - \sum_r p'_r$ e \bar{H} .

A Hamiltoniana para uma única onda foi, inicialmente, formulada como um modelo simplificado para tratar a instabilidade devido a um feixe (fraco) de elétrons em um plasma frio, assumindo um fundo neutralizante iônico fixo [35,36]. Posteriormente, diferentes estudos estenderam a aplicação do modelo de uma única onda a uma classe muito maior de instabilidades [74], derivando-a de maneira genérica, de forma que este modelo é utilizado para descrever vários fenômenos em fluidos, plasmas [75], e na amplificação de laser de elétrons livres [76], por exemplo.

CAPÍTULO 5 - Análise da interação para uma onda e uma partícula

Neste capítulo apresentamos as análises devido à interação autoconsistente onda-partícula, a partir da função Hamiltoniana que descrevemos no capítulo anterior, para o caso mais simples: com uma partícula, $N = 1$. A interação auto-consistente via acoplamento de uma partícula e uma onda ($M = N = 1$) é completamente integrável [77, 78], uma vez que a energia e o momento linear total são constates de movimento independentes. Como veremos no capítulo 6, a dinâmica para $N = 2$ incorpora a maioria dos fenômenos básicos que discutiremos aqui. Além disso, a dinâmica com $N = 1$ tem fundamental importância na descrição de sistemas com muitas partículas ($N \gg 1$), onde utiliza-se uma ferramenta matemática, chamada macropartícula para representar a dinâmica de um feixe de elétrons frios, por exemplo [77], de forma, que os elétrons do feixe oscilam agrupados no potencial estável da onda durante o regime de aprisionamento [35, 36, 79, 80]. Iniciaremos nossas análises através da descrição qualitativa do sistema, de forma que sejamos capazes de compreender os mecanismos básicos, bem como a família de soluções associadas a determinados valores de parâmetros e/ou das condições iniciais do sistema. Em posse da descrição qualitativa, realizamos também cálculos numéricos computacionais para determinados conjuntos de condições iniciais e apresentamos as mudanças topológicas no espaço de fases devido a variação do momento linear total, P , que influencia diretamente a troca de momento onda-partícula. A mudança qualitativa na estrutura topológica do espaço de fase, conforme variamos o parâmetro P , está associada a uma bifurcação do tipo sela-nó, também chamada de bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, na qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado (ou destruído).

5.1 Análise preliminar e qualitativa da dinâmica

Na seção 4.3 do capítulo anterior obtivemos que a função Hamiltoniana para uma única onda é dada por

$$H(y, p) = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} - \sqrt{2I} \sum_{r=1}^N \cos y_r, \quad (5.1)$$

onde $y_r = x_r - \theta$, ou seja, y_r corresponde a posição das partículas, x_r , em relação a fase, θ , da onda. Nesta abordagem o momento linear total é dado pela soma dos momentos das partículas mais a contribuição da onda.

$$\bar{P} = \sum_{r=1}^N p_r + I. \quad (5.2)$$

Para o caso com uma partícula, $N = 1$, a Hamiltoniana (5.1) é, então, reescrita como

$$H(y, p) = \frac{p^2}{2} - \sqrt{2(P - p)} \cos y, \quad (5.3)$$

onde optamos por expressar $I = P - p$. Conforme estabelece a Equação (5.3), este sistema possui dois graus de liberdade, tal que a dinâmica ocorre em um espaço de fase 4-dimensional. Entretanto, como H e P são constantes de movimento independentes, então, o sistema com $N = 1$ corresponde a um *sistema Hamiltoniano integrável*. Em decorrência disso, a dinâmica no espaço de fase é, naturalmente, representada apenas por *trajetórias regulares*. A trajetória que passa, assintoticamente, ao ponto hiperbólico, denominada separatriz, não possui comportamento caótico, portanto, neste caso o ponto hiperbólico não é propício ao surgimento de caos.

As equações que regem o movimento do sistema, obtidas a partir da Equações canônicas de Hamilton,

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (5.4)$$

para a Hamiltoniana (5.3) são, então, escritas como

$$\dot{y} = p + \frac{1}{\sqrt{2(P - p)}} \cos y, \quad (5.5a)$$

$$\dot{p} = -\sqrt{2(P - p)} \sin y. \quad (5.5b)$$

Agora, em posse das Equações de movimento, podemos, então analisar qualitativamente a dinâmica deste sistema. Esse tipo de análise é amplamente significativa, quando se deseja descrever o comportamento qualitativo do sistema, em detrimento da solução exata. Nesse caso, busca-se identificar a família de soluções associadas a determinados valores de parâmetros e/ou das condições iniciais do sistema.

Iniciamos, então, a análise qualitativa para o caso com $N = 1$, identificando os *pontos fixos (ou de equilíbrio)* do sistema, bem como, o tipo de *estabilidade* associada a cada ponto fixo. A estabilidade à qual vamos nos referir nesta análise, é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à vizinhança de sua solução, ou seja, é uma solução representada por um ponto fixo no espaço de fase. Identificar os pontos fixos em um sistema Hamiltoniano autônomo é de fundamental importância, uma vez que, o espaço de fase desses sistemas é diretamente influenciado pela localização e pela estabilidade dos pontos fixos.

Em suma, os pontos fixos de um sistema representam soluções estacionárias. Isso significa dizer que, os valores de (y_i, p_i) em (5.5), tais que quando $(y_i, p_i) = (y_i^*, p_i^*)$, o sistema para de se mover no espaço de fase. Aqui estamos utilizando a notação com o asterisco para representar os valores de (y_i, p_i) no equilíbrio, onde $i = 1, 2, 3, \dots$. Assim, fazendo

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (5.6)$$

obtemos, a partir de (5.5), que as coordenadas, (y_i^*, p_i^*) , dos pontos fixos, C_i , do sistema estão localizadas em

$$C_1^* : (0, p_1^* \sqrt{2(P - p_1^*)} = -1), \quad (5.7a)$$

$$C_{2,3}^* : (\pi, p_{2,3}^* \sqrt{2(P - p_{2,3}^*)} = 1), \quad (5.7b)$$

com $p_1^* < 0$, $0 < p_2^* < 1$ e $p_3^* > 1$. Além disso, a intensidade da onda nos pontos fixos é identificada como $I_i^* = P - p_i^*$. Qualquer ponto (y_i, p_i) que não seja ponto fixo, é chamado de ponto ordinário ou ponto regular. De (5.5), nota-se que, se escolhermos uma condição inicial que coincide com um ponto fixo, então o sistema permanecerá com essa mesma localização indefinidamente. Nesse sentido, emprega-se a análise qualitativa para descrever o comportamento assintótico do sistema, analisando-se a dinâmica na vizinhança de cada ponto fixo C_1^* , $C_{2,3}^*$.

Para analisar a estabilidade dos pontos fixos, (5.6), empregamos o método de linearização¹ nas equações de movimento (5.4) e, determinamos a estabilidade para cada ponto fixo a partir das soluções dos autovalores da matriz Jacobiana² que, são funções dos parâmetros das equações do sistema. Realizando este procedimento obtivemos que, os autovalores correspondentes a C_1^* e $C_{2,3}^*$ são, respectivamente

$$\lambda_1 = \pm \left(-\sqrt{2I_1^*} - \frac{1}{2I_1^*} \right)^{1/2}, \quad (5.8a)$$

$$\lambda_{2,3} = \pm \left(\sqrt{2I_{2,3}^*} - \frac{1}{2I_{2,3}^*} \right)^{1/2}. \quad (5.8b)$$

A Equação (5.8a) mostra, claramente que, o autovalor λ_1 possui solução imaginária para qualquer valor de I_1^* . Logo, o ponto fixo localizado em $y_1^* = 0$ possui *estabilidade elíptica (ou estável)*. Além disso, uma vez que $p_1^* < 0$, a condição física $I_1^* = P - p_1^*$ assegura que $I_1^* > P$ para qualquer valor de P .

¹Em sistemas dinâmicos linearização é um método para avaliar a estabilidade local de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais não linear, através da análise do sistema linear associado.

²A matriz Jacobiana é uma matriz $m \times n$, formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Já a Equação (5.8b) mostra que as soluções possíveis para o autovalor $\lambda_{2,3}$ dependem do valor de $I_{2,3}^*$ que, por sua vez é função do momento total P . Quando $I_2^* = I_3^* = 1/2$, o autovalor $\lambda_{2,3} = 0$ é degenerado. Isso indica que no ponto fixo, cuja coordenada espacial é $y_{2,3}^* = \pi$ ocorre uma bifurcação no sistema. Para $I_2^* > 1/2$, o autovalor $\lambda_2 = 0$ é real, portanto, em $y_2^* = \pi$ o sistema possui *estabilidade hiperbólica (ou instável)* para qualquer valor de $P > 3/2$ com $0 < p_2^* < 1$. E, finalmente, para valores de $0 < I_3^* < 1/2$, o autovalor λ_3 possui solução imaginária, indicando que na mesma abscissa $y_3^* = y_2^* = \pi$, teremos também estabilidade elíptica para qualquer valor de $P > 3/2$ desde que $p_3^* > 1$.

Conforme retrata as Equações (5.7), o valor de p_i^* no equilíbrio é dado em função do momento linear total P , ou seja,

$$p_i^* = \pm 1/\sqrt{2(P - p_i^*)}. \quad (5.9)$$

Dessa forma, determinamos uma relação que descreve as soluções para p_i^* no equilíbrio, dada por

$$(P - I_i^*)^2 I_i^* = 1/2, \quad (5.10)$$

e esboçamos a solução numérica de (5.10) na Figura 5.1(a). Conforme é apresentado na Fig. 5.1(a), a Equação (5.10) seleciona os valores em I_i^* para os quais o polinômio cúbico no lado esquerdo assume um determinado valor. A linha azul contínua na Fig. 5.1(a) representa a solução estável no ponto fixo elíptico em y_1^* . Essa solução existe para qualquer valor do momento total P , com $I_1^* > 0$. O ponto preto com $P = 3/2$ e $I_i^* = 1/2$, corresponde ao ponto de bifurcação no sistema no qual dois tipos de equilíbrio com estabilidades diferentes coincidem no mesmo ponto fixo $y_{2,3}^* = \pi$. Após o ponto da bifurcação, a linha vermelha pontilhada representa a solução instável no ponto fixo $y_2^* = \pi$, com $I_2^* > 1/2$ e a linha verde duplo pontilhada representa a a solução estável, localizada no mesmo ponto fixo $y_3^* = \pi$, com $0 < I_3^* < 1/2$.

Outro fator importante que destacamos nesta descrição é que, como o sistema é conservativo, então, o potencial associado à onda não pode permanecer nulo. Asseguramos que tal condição é naturalmente satisfeita analisando-se a dinâmica conforme a seguir:

$$H = \frac{p^2}{2} + (Y \sin x - X \cos x), \quad (5.11)$$

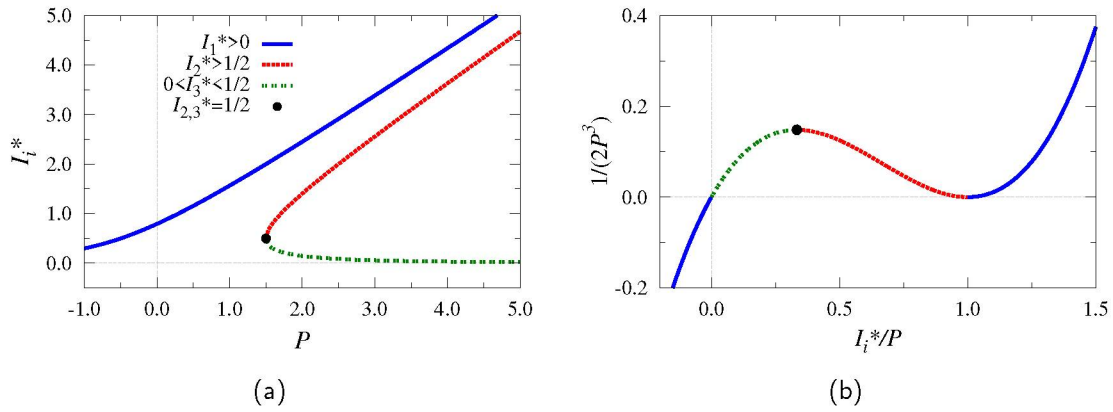


FIGURA 5.1 – (a) Diagrama de bifurcação a partir da Equação (5.10). A linha azul (contínua) corresponde ao ponto fixo elíptico estável $y_1^* = 0$. O ponto em preto em $I_{2,3}^* = 1/2$ e $P = 3/2$ corresponde à bifurcação, e as linhas vermelha (pontilhada) e verde (dupla pontilhada) correspondem, respectivamente, aos pontos fixos hiperbólicos e elípticos em $y_{2,3}^* = \pi$ após a bifurcação. Em (b) mostramos as raízes da equação (5.10), normalizada, $(1 - I/P)^2 I/P = 1/(2P^3)$ que, complementa assiduamente, a descrição das mudanças topológicas no espaço de fase deste sistema.

cujas equações de movimento correspondentes são

$$\dot{x} = p, \quad (5.12a)$$

$$\dot{p} = -X \sin x - Y \cos x \quad (5.12b)$$

$$\dot{X} = \sin x, \quad (5.12c)$$

$$\dot{Y} = \cos x, \quad (5.12d)$$

Logo, como $\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = 1$ e $\ddot{p} = -1 + (Y \sin x - X \cos x)p$, então a intensidade da onda, I , nunca se anula permanentemente. Observe que nada impede que I passe por zero. De fato, quando isso ocorre a fase da onda, θ , “salta” entre $\pm\pi/2$. A trajetória com condição inicial $I = 0$ será apresentada e discutida em detalhes na próxima seção, onde analisaremos o comportamento do sistema no retrato de fase (y, p) .

O sistema com $N = 1$ é integrável, tal que, resolvendo (5.3) para $\cos(y)$ e (5.5b) por quadratura obtemos a seguinte equação de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{p}^2 &= 2(P - p) \left[1 - \left(\frac{H - p^2/2}{\sqrt{2(P - p)}} \right)^2 \right], \\ \dot{p}^2 &= 2P - H^2 - 2p + Hp^2 - \frac{p^4}{4}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

que é resolvida analiticamente em termos de funções elípticas [77]. Resumidamente, encontra-

se uma função \mathfrak{P} tal que $p = \mathfrak{P}(t; p_0, P, H)$ integrando (5.13), e uma função \mathfrak{Y} tal que $y = \mathfrak{Y}(t; p_0, P, H) = \text{Arcsen}[-\dot{p}/\sqrt{2(P-p)}] = \text{Arccos}[(p^2 - 2H)/\sqrt{8(P-p)}]$ modulada pelas condições de contorno. Também é possível construir variáveis de ângulo-ação para cada tipo de trajetória periódica.

Os pontos de equilíbrio da Equação (5.13) são definidos pela condição $p = p_i^* = \text{constante}$, tal que,

$$G(p_i^*) = 0, \quad \left. \frac{dG}{dp} \right|_{p=p_i^*} = 0, \quad (5.14)$$

com $G(p)$ o polinômio quártico no lado direito de (5.13). Resolvendo (5.13) para os valores dos parâmetros H e P , encontramos curvas, parametricamente, dadas por

$$P(p_i^*) = \frac{1 + 2p_i^{*3}}{2p_i^{*2}}, \quad H(p_i^*) = \frac{2 + p_i^{*3}}{2p_i^*}. \quad (5.15)$$

Essas curvas no plano (P, H) contêm informações importantes sobre a dinâmica do sistema [81].

As soluções das equações (5.15) no plano (P, H) estão representadas na Fig. 5.2, onde a curva azul (sólida) representa o ponto elíptico estável em $y_1^* = 0$; o ponto preto em $(P, H) = (3/2, 3/2)$ com $p_{2,3}^* = 1$ corresponde à bifurcação; a curva vermelha (pontilhada) representa os parâmetros do ponto fixo hiperbólico em $y_2^* = \pi$; e a linha verde (duplo-pontilhada) está associada ao ponto fixo elíptico que também aparece em $y_3^* = \pi$, após a bifurcação. Observe ainda que, após a bifurcação, para um dado valor de P , a energia do ponto fixo estável (elíptico) em $y_1^* = 0$ é menor que a energia do ponto fixo hiperbólico em $y_2^* = \pi$, e esta, por sua vez, é inferior à energia do ponto fixo elíptico em $y_3^* = \pi$. As mudanças topológicas descritas pelas soluções de (5.5) na Fig. 2.1(a) e por (5.15) na Fig. 5.2 são apresentadas nos retratos de fase da próxima seção.

Além disso, para as curvas (P, H) , a equação de evolução (5.13) se reduz a

$$\dot{p} = \pm(p - p^*) \left(\frac{1}{p^*} - \frac{(p - p^*)^2}{4} \right)^{1/2}, \quad (5.16)$$

que pode ser resolvido em termos de funções elementares. Especificamente, se $0 < p^* < 1$, esta equação admite soluções de valor real para tempo real, descrevendo o movimento na separatriz do ponto fixo hiperbólico. Pelo contrário, se $p^* < 0$ ou se $p^* > 1$, a equação (5.15) não tem solução de valor real, pois o ponto fixo associado é elíptico.

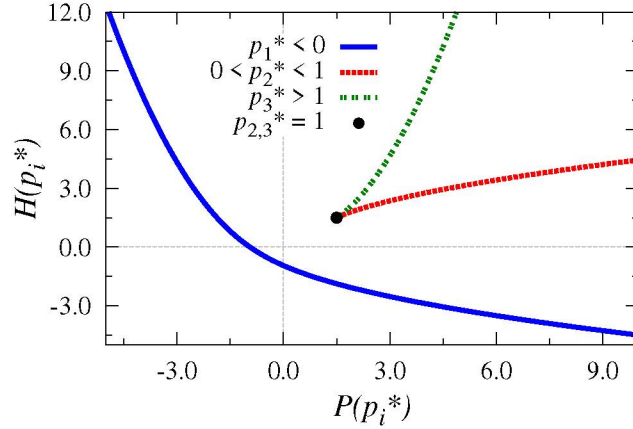


FIGURA 5.2 – Curvas, parametricamente, no plano (P, H) calculadas a partir das Equações (5.15). A linha contínua azul representa a solução estável no ponto fixo $y_1^* = 0$. As curvas vermelha e verde correspondem as soluções de equilíbrio nos pontos fixos hiperbólico e elíptico em $y_{2,3}^* = \pi$, após a bifurcação, a qual ocorre em $(P, H) = (3/2, 3/2)$ com $p_{2,3}^* = 1$ e está representada pelo ponto preto na figura.

5.2 Análise numérica computacional da dinâmica no espaço de fase da partícula

Conforme descrevemos na seção anterior, a variação de P implica em diferentes topologias no espaço de fase do sistema, onde a interação onda-partícula ocorre singularmente em cada domínio. As trajetórias no espaço (y, p) , moduladas em $y = x - \theta \bmod 2\pi$, têm valor de H e P constantes ao longo de toda a iteração.

A Figura 5.3 mostra o comportamento do sistema para diferentes valores (constante) do momento linear total P . Nesta abordagem a intensidade da onda, I , deve ser positiva, de modo que $p \leq P$. No entanto, conforme demonstramos na seção anterior a intensidade da onda pode passar por zero, mas nunca permanecerá nula pois o sistema em questão é conservativo.

A trajetória preta em todos os painéis da Figura 5.3, representa a condição inicial pela qual a intensidade de onda se anula momentaneamente, ou seja, $I = 0$. Tal fenômeno é fisicamente aceitável, visto que a ordenada P para p não corresponde a um contínuo de valores para y , uma vez que a Equação (5.5a) não tem sentido se $\cos y \neq 0$. Assim, apenas abscissas com $y = \pm\pi/2$ são permitidas quando $I = 0$, e então a fase da onda, θ , é na verdade indefinida. Mas a dinâmica é bem definida nas variáveis cartesianas (X, Y) , e, se a onda se anula em algum momento, então $\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = 1$ implica que I não pode permanecer zero, ou seja, o potencial agindo na partícula não pode permanecer nulo. Na realidade, como a posição da partícula é uma função suave do tempo, o que ocorre quando I se anula (momentaneamente) é que a fase da onda salta entre $x - \pi/2$ e $x + \pi/2$, e a trajetória no espaço das variáveis (y, p) transita através desta conexão com $\dot{p} = 0$ e $\ddot{p} = -1$, de modo que o valor $p = P$ é um

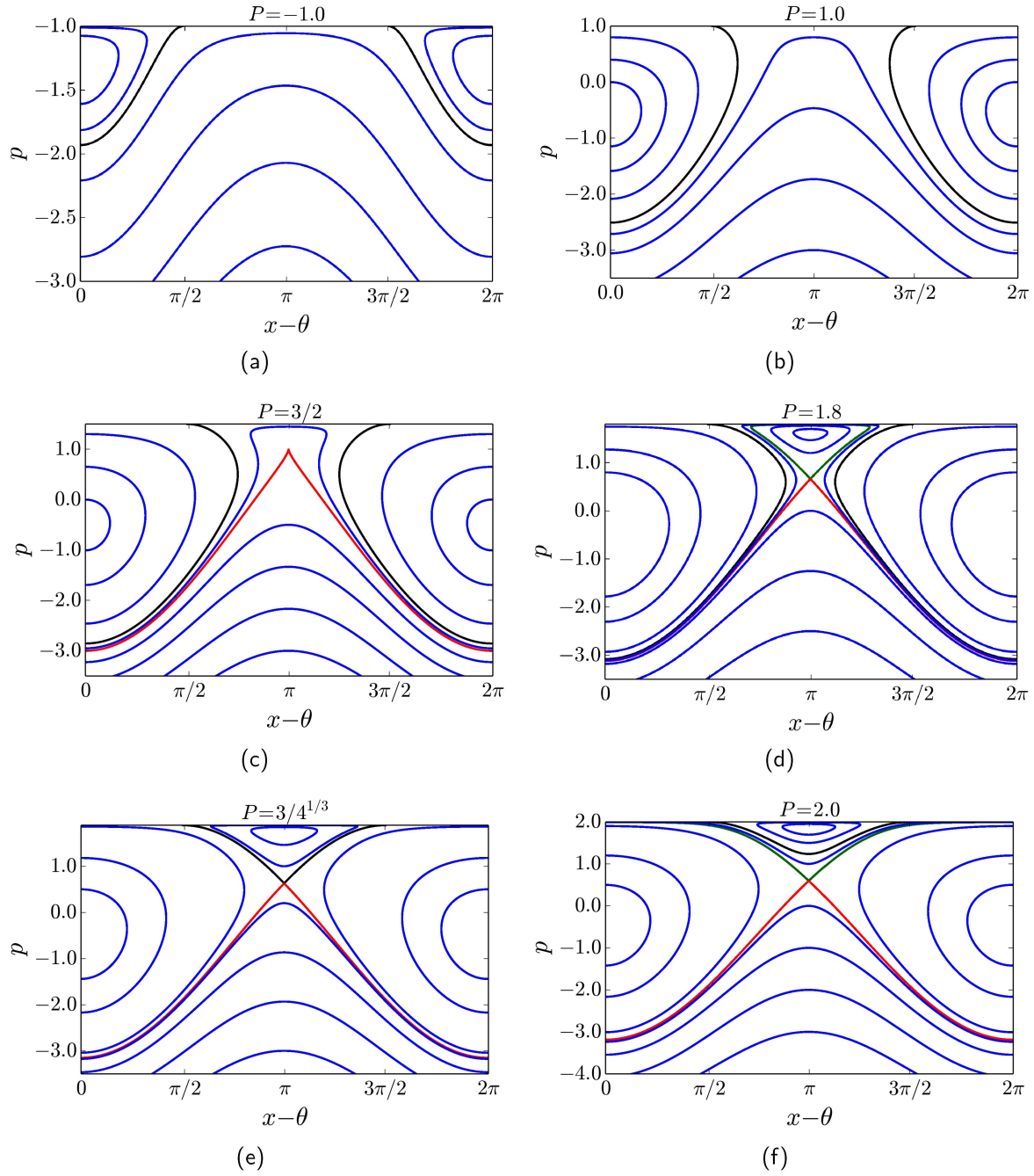


FIGURA 5.3 – Representação da dinâmica no espaço de fase da partícula para o caso com $N = 1$. Os painéis (a) e (b) mostram a topologia do espaço de fase para $P < 3/2$ (antes da bifurcação). Painel (c) mostra o valor de $P = 3/2$, para o qual o sistema apresenta uma bifurcação do tipo sela-centro. O painel (e) mostra a dinâmica para um valor especial do parâmetro $P = 3/4^{1/3}$, para o qual, a trajetória que contém $I = 0$ coincide com o ramo superior da separatriz do ponto X, e, o painel (f) mostra a dinâmica após a bifurcação global do sistema.

máximo local não degenerado de p ao longo da trajetória.

De acordo com (5.3), a trajetória com condição inicial $I = 0$ possui energia igual a

$H = P^2/2$. O “salto” da fase de π , troca instantaneamente as localizações do vale e crista do potencial da onda. Esse mecanismo está, substancialmente, relacionado ao surgimento de caos em sistemas com mais de uma partícula [75]. Observe ainda que, para os valores de $P < 3/2$, Figs. 5.3(a) e 5.3(b), a trajetória preta separa o retrato de fase em dois domínios diferentes, tais que vemos trajetórias fechadas girando em torno do ponto fixo elíptico (em $y = 0$) e trajetórias abertas girando em torno do cilindro ($y \bmod 2\pi$). De fato, como já discutimos na seção anterior, o ponto fixo em $y = 0$ tem sempre estabilidade elíptica independentemente do valor do momento total P , de modo que a dinâmica do sistema em torno do ponto elíptico é representado por trajetórias fechadas. Em tempo contínuo, isso significa que a partícula oscila no potencial estável da onda. As trajetórias abertas representam o movimento balístico, ou seja, quando a partícula não interage efetivamente com a onda.

Seguindo a sequência dos painéis na Figura 5.3, observa-se que conforme o valor do parâmetro P aumenta, as trajetórias vão sendo deformadas à medida que se aproximam do ponto fixo hiperbólico $y = \pi$. Isso significa que, devido ao aumento de P a partícula ganha posições em relação ao potencial. De maneira geral, a deformação das trajetórias (em direção ao ponto hiperbólico) indica que a troca de momento onda-partícula ocorre em escalas temporais diferentes, o que corresponde aos diferentes domínios no espaço de fase.

O painel 5.3(c), mostra a topologia do espaço de fase quando $P = 3/2$. Em concordância com o que discutimos na seção anterior, para esse valor do parâmetro P o sistema passa por uma bifurcação do tipo sela-centro, na qual, um par de pontos fixos, a saber, elíptico e hiperbólico coalescem. A trajetória assintótica ao ponto de bifurcação é representada pela linha vermelha na Fig. 5.3(c).

Por conseguinte, o painel 5.3(d) mostra o espaço de fase da partícula para $P = 1,8 > 3/2$. Em concordância com a análise qualitativa, observamos dois tipos diferentes de estabilidade na mesma coordenada de ponto fixo $y = \pi$. O ponto fixo superior é elíptico, circundado por órbitas girando no sentido anti-horário no retrato de fase (ilhas em $y = \pi$). O ponto fixo inferior é hiperbólico, e o ramo inferior de sua separatriz (trajetória vermelha) vira (para a esquerda) em torno do cilindro: quando $t \rightarrow -\infty$, a partícula deixa a crista do potencial da onda, ela passa na parte inferior do potencial da onda quando a onda tem sua maior amplitude e assintota³ novamente a próxima crista do potencial de $t \rightarrow +\infty$, de forma que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t) dt = -2\pi$.

O ramo superior da separatriz (trajetória preta em 5.3(e)) forma, para $3/2 < P < 3/4^{1/3}$, um loop anti-horário em torno do ponto fixo elíptico, com $\cos(x - \theta)$ sempre negativo:

³A assíntota de uma curva hipérbole é um ponto ou uma curva de onde os pontos da hipérbole se aproximam à medida que se percorre a hipérbole.

a partir de $t \rightarrow -\infty$, a partícula deixa a crista do potencial da onda, passa novamente na mesma crista do potencial da onda quando a onda tem sua menor amplitude e assintota novamente a mesma crista do potencial de $t \rightarrow +\infty$, de forma que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t) dt = 0$.

A Fig. 5.3(e) mostra ainda que para um valor específico do parâmetro P : quando $P = 3/4^{1/3}$, a trajetória cuja intensidade da onda é nula pertence à separatriz, ou seja, passa assintoticamente ao ponto hiperbólico- X ($y = \pi$, $p_c \sqrt{2(P - p_c)} = 1$). A trajetória que representa este caso têm energia $H = P^2/2$ (fazendo $I = 0$ na Hamiltoniana (5.3)), e essa energia também deve ser igual à energia do ponto X , ou seja,

$$H = p_c^2/2 + \sqrt{2(P - p_c)}, \quad (5.17)$$

onde p_c é a coordenada momento do ponto X , obtida resolvendo a condição $p_c \sqrt{2(P - p_c)} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} P^2 &= p_c^2 + 2\sqrt{2(P - p_c)} \\ &= p_c^2 + 2/p_c, \end{aligned} \quad (5.18)$$

e a condição do ponto X implica que

$$P = p_c + 1/(2p_c^2), \quad (5.19)$$

de forma que,

$$p_c^2 + 1/p_c + 1/(4p_c^4) = p_c^2 + 2/p_c, \quad (5.20)$$

ou seja,

$$p_c = 4^{-1/3}, \quad \text{e} \quad P = 3/4^{1/3}. \quad (5.21)$$

Como este retrato de fase conecta dois pontos distintos (o ponto $I = 0$ e o ponto X), então o sistema passa por uma bifurcação global neste valor de $P = 3/4^{1/3}$.

Para $P > 3/4^{1/3}$, Fig.5.3(f), o ramo superior da separatriz se envolta ao redor do cilindro (para a direita): de $t \rightarrow -\infty$, a partícula deixa a crista do potencial, passa na parte estável do potencial quando a onda tem sua menor amplitude e assintota a próxima crista do potencial para $t \rightarrow +\infty$, de forma que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t) dt = 2\pi$. Além disso, para $P > 3/4^{1/3}$, a linha preta contendo os pontos com $I = 0$ separa dois domínios: acima dele, as trajetórias circulam no sentido anti-horário em torno do ponto fixo elíptico em $y = \pi$, enquanto as trajetórias envolvem o cilindro (à direita) entre ele e o ramo superior da separatriz.

CAPÍTULO 6 - Caos em baixa dimensão: sistema com duas partículas

Neste capítulo discute-se a interação autoconsistente com duas partículas ($N = 2$) e uma onda ($M = 1$). Neste caso a integrabilidade é perdida e, então o sistema é propício ao surgimento de caos, uma vez que a separatriz de sistema Hamiltoniano não-integrável é caótica [53]. Além do caos de separatriz, tipicamente, esperado para esse tipo de sistema, detectamos também o surgimento de movimento caótico nas proximidades do ponto fixo elíptico (estável) para o regime de energia negativa ($H \leq 0$). Para sistemas onda-partícula a dinâmica caótica na vizinhança do ponto fixo estável não é esperada, pois no regime com $H \leq 0$ as partículas, a princípio deveriam oscilar no potencial estável da onda. No entanto, nossas análises mostram que nesse regime de energia, o surgimento de caos ocorre devido a sensibilidade na condição inicial das velocidades relativas das partículas. No regime de energia positivo $H > 0$ mostramos o comportamento caótico, denominado *caos de separatriz*. Isso decorre do fato de que, na região da separatriz as distâncias entre as ressonâncias são muito pequenas, de modo que, para pequenos valores de perturbação o sistema é, rapidamente, conduzido ao regime caótico [53].

6.1 Caos: aspectos gerais

O estudo e caracterização de caos é largamente utilizado para o entendimento de diversos comportamentos presentes na dinâmica de vários sistemas físicos. Fenômenos caóticos já foram identificados em praticamente todas as áreas da ciência e engenharia, como por exemplo, no movimento dos planetas [82], epidemias [83], populações mutáveis de insetos [84, 85], na interação onda-partícula [86, 87], na difusão [88] e transporte anômalo de partículas [89] em sistemas Hamiltonianos [90] entre outros.

Em sistemas caóticos determinísticos¹, as medições feitas no estado de um sistema em um dado tempo podem não permitir que façamos previsões da situação futura, independentemente do fato das equações que governam o movimento do sistema serem conhecidas exatamente [91]. O caos determinista é sempre associado a um sistema não linear, isto é, a não linearidade é uma condição necessária para o caos, mas não suficiente. O caos ocorre quando o sistema depende, de um modo sensível de seu estado anterior [57].

Uma das principais características pertinentes à sistemas caóticos é a imprevisibilidade quanto ao estado futuro do sistema. Essa característica está diretamente relacionada à dependência sensível nas condições iniciais, ou seja, dadas duas condições iniciais, arbitrariamente

¹Caos determinístico refere-se ao modo que um sistema evolui de um instante ao seguinte, no qual, o sistema atual depende daquele que acabou de passar de um modo bem determinado por meio das leis da física. Não se trata de movimentos aleatórios, no qual, o sistema atual não possui conexão causal com o anterior [91].

próximas, após um período de tempo suficiente o sistema pode ser conduzido a soluções completamente diferentes. Uma forma, tradicionalmente, eficiente de medir a dependência sensível das condições iniciais é através do chamado *expoente de Lyapunov* [52, 53, 57].

De modo simplificado, o método do *expoente característico de Lyapunov*, representa o coeficiente do crescimento exponencial médio por unidade de tempo entre dois estados do sistema. Para um sistema específico, existem tantos expoentes de Lyapunov quanto o número de variáveis [57]. Assim, se considerarmos um sistema com uma variável (e, portanto, um expoente de Lyapunov) com dois estados iniciais que diferem por uma quantidade pequena x_0 e $x_0 + \varepsilon$, o objetivo é, então investigar os eventuais valores de x_n após n interações. Essa diferença entre os dois valores é dada, aproximadamente, por $d_n \simeq \varepsilon e^{n\lambda}$, onde se o valor de λ for negativo, então as órbitas irão, eventualmente convergir [91]. Por outro lado, se λ for positivo, as trajetórias divergem e, então o sistema apresenta característica de soluções caóticas.

6.1.1 Seção de Poincaré

Uma forma usual de simplificar a descrição de sistemas dinâmicos dá-se através das chamadas *seções de Poincaré*, cujo nome é uma homenagem ao cientista francês Jules H. Poincaré (1854-1912) que em 1899 foi o primeiro a utilizar tais seções no estudo do problema de três corpos [92, 93]. As seções de Poincaré equivalem assumir uma visão estroboscópica do espaço de fase, de modo que, eventualmente, possamos visualizar trajetórias quase-periódicas sobre toros na forma de ilhas de regularidade e caos [52, 53, 57].

As principais vantagens na utilização das seções de Poincaré consistem: redução dimensional, de modo que, através das seções de Poincaré reduzimos um espaço de fase N -dimensional a um espaço de $(N - 1)$ -dimensão, eliminando uma variável do problema original [92]; estudar a dinâmica global do sistema, uma vez que, em sistemas com baixa dimensionalidade, a integração numérica das equações diferenciais do problema original representa a dinâmica global [92]. Além disso, a clareza conceitual permite que conceitos físicos, difíceis de serem visualizados no espaço de fases original do sistema, tornam-se claros quando analisamos através das seções de Poincaré.

A construção de uma seção de Poincaré pode ser realizada seguindo o procedimento apresentado a seguir: seja um fluxo N -dimensional ϕ_t descrito por equações diferenciais da forma $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Sobre o espaço gerado pelas equações diferenciais é construída uma hiper-superfície Ω . Marcamos então, os sucessivos furos que uma determinada trajetória, sempre no mesmo sentido, produz na superfície Ω , conforme apresentado na Figura 6.1. Os pontos x_n, x_{n+1} e x_{n+2} representam, respectivamente, a primeira, segunda e terceira vez que a tra-

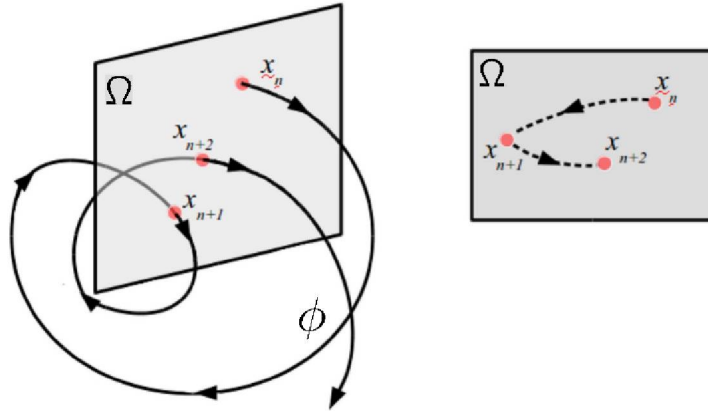


FIGURA 6.1 – Representação geométrica de uma seção de Poincaré fixada no espaço de fase original gerado pelas equações diferenciais. Figura proveniente da referência [94].

jetória transpassa a hiper-superfície Ω . Neste caso, o mapa de Poincaré é obtido simplesmente considerando-se a intersecção da trajetória com o plano Ω [95].

6.1.2 Espectro de potência

Uma das características pertinentes aos movimentos caóticos está associada aos sinais irregulares e aperiódicos [45]. No entanto, em certos casos a distinção entre sinais multiplamente periódicos e sinais caóticos nem sempre é trivial [96]. Uma forma conveniente de medir a periodicidade de um certo sinal $x(t)$, por exemplo, é através da transformada de Fourier,

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt e^{i\omega t} x(t), \quad (6.1)$$

onde $x(t)$ indica o peso relativo com que a frequência ω está presente no sinal $x(t)$. Nesse sentido, o espectro de potência $P(\omega)$ é dado por:

$$P(\omega) = |x(\omega)|^2. \quad (6.2)$$

Em suma, a análise de sinais temporais através dos espectros de potências são caracterizados por determinados comportamentos característicos. Por exemplo, um sinal periódico quando é analisado através do espectro de potência, além do pico em $2\pi/T$ correspondente ao período do sinal, mostra também a presença de picos menores correspondentes aos harmônicos do período T , ou seja, $4\pi/T$, $6\pi/T$, \dots , $2n\pi/T$ [96].

O caso onde o sinal é composto por duas frequências incomensuráveis (razão entre as frequências é um número irracional) caracteriza um espectro ainda mais complicado, no qual, além dos picos relativos aos seus períodos, apresentam também picos nas seguintes

frequências [96]:

$$\omega_i = |m_1\omega_1 + m_2\omega_2|, \quad (6.3)$$

onde m_1 e m_2 são inteiros arbitrários e ω_1 e ω_2 são as duas frequências do sinal. Já o caso de um sinal caótico (que é aperiódico) é caracterizado por um espectro de potência ruidoso e com bandas largas, tal que não apresenta picos bem definidos [96].

6.2 Hamiltoniana da interação para $N=2$, $M=1$

Para escrevermos a Hamiltoniana da interação para $N = 2$, $M = 1$, retornemos à Hamiltoniana original (4.10) que apresentamos no capítulo 4,

$$H_{sc}^{N,M} = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2} + \sum_{j=1}^M \omega_{0j} I_j - \varepsilon \sum_{r=1}^N \sum_{j=1}^M k_j^{-1} \beta_j \sqrt{2I_j} \cos(k_j x_r - \theta_j). \quad (6.4)$$

Logo, para o caso com $N = 2$, $M = 1$, a função Hamiltoniana que descreve a interação autoconsistente onda-partícula é, então dada por

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \omega_0 I - \varepsilon \sqrt{2I} [\cos(x_1 - \theta) + \cos(x_2 - \theta)], \quad (6.5)$$

onde, conforme discutimos na seção 4.3, uma transformação de Galileo nos permite colocar o sistema no referencial da onda, tal que possamos definir $\omega_0 = 0$. Assim, ficamos com

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \varepsilon \sqrt{2I} [\cos(x_1 - \theta) + \cos(x_2 - \theta)]. \quad (6.6)$$

Agora, redimensionando todas as variáveis como $t' = \lambda^{-1}t$, $x' = x$, $\theta' = \theta$, $p' = \lambda p$, $I' = \lambda I$, $P' = \lambda P$, $X' = \lambda^{1/2}X$, $Y' = \lambda^{1/2}Y$, $H' = \lambda^2 H$ obtemos, então, que o parâmetro de acoplamento ε também pode ser redimensionado por $\varepsilon' = \lambda^{3/2}\varepsilon$. Com isso, ficamos com três casos possíveis, condicionados a ε , ou seja,

- a) se $\varepsilon = 0$: o sistema está desacoplado;
- b) se $\varepsilon = 1$: o acoplamento tem força unitária e favorece $x_{1,2} \sim \theta$ energeticamente;
- c) se $\varepsilon = -1$: o acoplamento tem força unitária e favorece $x_{1,2} \sim \pi + \theta$ energeticamente, mas isso pode ser absorvido na mudança de variável $\theta' = \theta + \pi$.

Portanto, o modelo é completamente parametrizado pela energia total H e momento total $P = p_1 + p_2 + (X^2 + Y^2)/2$ para $\varepsilon = 1$. Então, partir daqui, a descrição será realizada considerando o acoplamento para o caso com $\varepsilon = 1$. Uma formulação Hamiltoniana semelhante

foi considerada por del Castillo Negrete e Firpo [75, 78], no qual o acoplamento onda-partícula é dado de forma diferente. Dessa forma, nossos resultados complementam os obtidos por eles.

Para o sistema $M = N = 1$, o fato de que a intensidade da onda deve ser positiva implicou que o momento da partícula p foi delimitado por P . Com duas partículas, o momento total P não define limites no momento individual para uma única partícula, tal que, aqui a soma dos momentos das partículas $p_1 + p_2$ que deve ser delimitada por P .

Para valores fixos do momento total P , escrevemos, então, a função Hamiltoniana em termos de (y_1, y_2, p_1, p_2) , com $I = P - p_1 - p_2$ e $y_r = x_r - \theta$ como

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \sqrt{2(P - p_1 - p_2)} (\cos y_1 + \cos y_2), \quad (6.7)$$

onde H e P são constantes de movimento independentes, com H correspondente à energia total do sistema.

A partir da função Hamiltoniana (6.7) obtemos que as equações de movimento do sistema são dadas por

$$\dot{y}_r = p_r + \frac{\cos y_1 + \cos y_2}{\sqrt{2(P - p_1 - p_2)}}, \quad (6.8)$$

$$\dot{p}_r = -\sqrt{2(P - p_1 - p_2)} \operatorname{sen} y_r, \quad (6.9)$$

Note que o caso com $N = 1$ é recuperado considerando-se a configuração com $y_1 = y_2$ e $p_1 = p_2$ e reescalando tempo, energia e constantes de acoplamento concordando com $\sigma = P/2$.

6.3 Definições preliminares para construção da seção de Poincaré

A Hamiltoniana do sistema com $N = 2$ (6.7) estabelece que a dinâmica original da Hamiltoniana tem três graus de liberdades, com espaço de fase $(\mathbb{T} \times \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}^2$, onde as partículas evoluem no cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ e o oscilador harmônico (que representa a onda) evolui no plano \mathbb{R}^2 . Como o momento linear total, P , e a energia total, H , são constantes de movimento independentes, então, a dinâmica fica restrita a variedade quadridimensionais, portanto, não há como obter, diretamente, a seção de Poincaré para um sistema 4-dimensional.

Antes de apresentar o procedimento que realizamos para a construção da seção de Poincaré, primeiro vamos fazer um adendo acerca das condições de contorno requeridas para este caso, a partir de (6.9) dada a transformação Galileana que consideramos. Observe que se $\omega_0 > 0$ a Hamiltoniana (6.9) deve obedecer a seguinte condição de contorno: $|\cos(x_1 - \theta) +$

$\cos(x_2 - \theta)$, tal que

$$\begin{aligned} H &\geq \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - 2\sqrt{2}I + \omega_0 I, \\ &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_0}{2} \left(\sqrt{2}I - \frac{2}{\omega_0} \right)^2 - \frac{2}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Enquanto que o caso com $\omega_0 \leq 0$ a Hamiltoniana (6.9) não é limitada a condição de contorno escrita acima, de modo que, nesse caso é possível que $x_1 = x_2 = \theta$ e $p_1 = p_2 = 0$ para I arbitrariamente grande. Então, $H = \omega_0 I - 2\sqrt{2}I \rightarrow \infty$ quando $I \rightarrow \infty$.

No entanto, como P é fixo, então a Hamiltoniana (6.9) é delimitada através da condição de contorno $\omega_0 \leq 0$, tal que

$$\begin{aligned} H &\geq \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - 2\sqrt{2}I + \omega_0 I, \\ &= \frac{(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{4} - 2\sqrt{2}\sqrt{(P - (p_1 + p_2))} + \omega_0[P - (p_1 + p_2)], \\ &\geq \frac{(p_1 + p_2)^2}{4} - 2\sqrt{2}\sqrt{(P - (p_1 + p_2))} + \omega_0[P - (p_1 + p_2)], \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde os dois últimos termos não podem divergir mais rápido que o primeiro, uma vez que P é limitado pela condição de contorno. Esse adendo mostra o quão importante é a conservação do momento total P nesta abordagem. Em adição, enfatiza também como a noção de energia depende do referencial do observador, ou seja, uma transformação de Galileo muda o modelo de H pela condição de contorno para qualquer P (com $\omega_0 > 0$) para H com condição de contorno condicionada em um P fixo.

A discussão acima estabelece que a intersecção das superfícies de energia e momento total são compactas para cada (H, P) , para qualquer ω_0 fixo. Efetivamente, as coordenadas generalizadas (x_1, x_2, θ) têm alcance sobre um 3-toro. Os momentos generalizados devem satisfazer as desigualdades acima, implicando que nem p_1 nem p_2 podem divergir e, assim, $I = P - p_1 - p_2$ não pode divergir também.

Para visualizar o movimento do sistema através de uma seção de Poincaré, primeiramente definimos novas variáveis em termos dos movimentos relativos, da seguinte forma

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(y_1 + y_2)}{2}, & z_2 &= \frac{(y_1 - y_2)}{2}, \\ w_1 &= \frac{(p_1 + p_2)}{2}, & w_2 &= \frac{(p_1 - p_2)}{2}. \end{aligned}$$

tal que os colchetes de Poisson são dados por

$$\begin{aligned} [f, g] &= \partial_{p_1} f \partial_{y_1} g - \partial_{y_1} f \partial_{p_1} g + \partial_{p_2} f \partial_{y_2} g - \partial_{y_2} f \partial_{p_2} g \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{w_1} f \partial_{z_1} g - \partial_{z_1} f \partial_{w_1} g + \partial_{w_2} f \partial_{z_2} g - \partial_{z_2} f \partial_{w_2} g), \end{aligned} \quad (6.12)$$

e, então as equações canônicas e Hamilton como

$$\dot{g} = [H, g] = (\partial_{w_1} \frac{H}{2}) \partial_{z_1} g - (\partial_{z_1} \frac{H}{2}) \partial_{w_1} g + (\partial_{w_2} \frac{H}{2}) \partial_{z_2} g - (\partial_{z_2} \frac{H}{2}) \partial_{w_2} g. \quad (6.13)$$

Mais especificamente, escrevemos as Equações de movimento do sistema nas novas variáveis como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= w_1 + \frac{\cos(z_1 + z_2) + \cos(z_1 - z_2)}{\sqrt{4(\sigma - w_1)}} \\ &= w_1 + \frac{\cos z_1 \cos z_2}{\sqrt{\sigma - w_1}}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\dot{z}_2 = w_2, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -\sqrt{4(\sigma - w_1)} \frac{\sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)}{2} \\ &= -2\sqrt{\sigma - w_1} \sin z_1 \cos z_2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 &= -\sqrt{4(\sigma - w_1)} \frac{\sin(z_1 + z_2) - \sin(z_1 - z_2)}{2} \\ &= -2\sqrt{\sigma - w_1} \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Note que as novas variáveis (w_1, w_2, z_1, z_2) não são canonicamente equivalentes às originais, uma vez que o colchete de Poisson é redimensionado por $1/2$, no entanto, a quantidade

$$\begin{aligned} E = H/2 &= \frac{w_1^2}{2} + \frac{w_2^2}{2} - \sqrt{\sigma - w_1} (\cos(z_1 + z_2) + \cos(z_1 - z_2)), \\ &= \frac{w_1^2}{2} + \frac{w_2^2}{2} - 2\sqrt{\sigma - w_1} \cos z_1 \cos z_2, \end{aligned} \quad (6.18)$$

desempenha o papel de uma Hamiltoniana nessas novas variáveis, pois a diferencial da ação do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} dS &= \sum_r p_r dx_r + I d\theta - H dt \\ &= \sum_r p_r dy_r + P d\theta - H dt \\ &= 2 \left(\sum w_r dz_r + \sigma d\theta - E dt \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Observe que $E = H/2$ é a energia por partícula, assim como $\sigma = P/2$ é o momento por partícula.

As condições de contorno periódicas $y_r \equiv y_r + 2\pi \pmod{2\pi}$ implica que o espaço de configuração é um toro, cuja cobertura deste toro seja dada por células na forma $z_r \equiv z_r + 2\pi \pmod{A_r}$. No entanto, para um determinado A_r , um conjunto com $A_1 = A_2 = \pi$ não é consistente para ambos z_1 e z_2 . Assim, por afinidade, definimos $A_1 = A_2 = 2\pi$, o que implica que as novas células têm uma área duas vezes maior que as originais e, portanto, dois pontos na célula (z_1, z_2) correspondem a um único ponto em (y_1, y_2) .

6.3.1 Localização da Seção de Poincaré para o sistema com $N=2$

Para as análises do caso com duas partículas, definimos a seção de Poincaré em $z_2 = y_1 - y_2 = 0 \pmod{2\pi}$, de modo que para um dado σ , um ponto (z_1, w_1) na seção pode corresponder a diferentes superfícies de energias E , dependendo de w_2 . Podemos observar que, quando ambas as partículas têm o mesmo $(p, y) = (p_1, y_1) = (p_2, y_2)$, o sistema tem o mesmo comportamento que no caso com apenas uma partícula, $N = 1$, apenas com o dobro de massa e da constante de acoplamento. Isso gera uma família de soluções para o caso com $N = 2$.

No entanto, precisamos nos atentar que para $N = 2$ temos, também, um w_2 arbitrário, tal que a energia é dada por

$$E = E_1 + w_2^2/2, \quad (6.20)$$

de modo que o caso de duas partículas possui uma energia excedente, em relação ao caso com $N = 1$. Assim, como E em (6.20) é uma quantidade conservada, então, esse excesso de energia $w_2^2/2$ que aparece no sistema com duas partículas pode ser tomado como uma perturbação adicional ao sistema que, por sua vez, está relacionado ao surgimento de trajetórias caóticas na seção de Poincaré.

Em (6.20),

$$E_1 = w_1^2/2 - 2\sqrt{\sigma - w_1} \cos z_1 \quad (6.21)$$

para $z_2 = 0$.

As trajetórias com $z_2 = 0$, $w_2 = 0$ aparecem na seção de Poincaré $z_2 = 0$ num domínio limitado para uma dada superfície de energia total H , onde sua estabilidade é governada pelas

seguintes equações linearizadas:

$$\dot{z}_1 = w_1 + \frac{\cos z_1}{\sqrt{\sigma - w_1}}, \quad (6.22)$$

$$\dot{w}_1 = -2\sqrt{\sigma - w_1} \operatorname{sen} z_1, \quad (6.23)$$

$$\delta \dot{z}_2 = \delta w_2, \quad (6.24)$$

$$\delta \dot{w}_2 = -(2\sqrt{\sigma - w_1} \cos z_1) \delta z_2. \quad (6.25)$$

Observe que a dinâmica em (z_1, w_1) é dominante, enquanto que a dinâmica em (z_2, w_2) é dependente (*slave*). Na realidade, uma expansão de Taylor para $\cos \delta z_2 = 1 - (\delta z_2)^2/2 + \dots$ evidência que δz_2 não pode “aparecer” na dinâmica de (z_1, w_1) .

Se a trajetória (z_1, w_1) permanecer confinada na banda de $\cos z_1 > 0$ (ou $-\pi/2 < z_1 < \pi/2$), então uma pequena perturbação $(\delta z_2, \delta w_2)$ obedece a uma equação de evolução linear com coeficientes periódicos no tempo, tipo coeficientes de Hill, $\delta \ddot{z}_2 = -g(t)\delta z_2$, com uma função $g(t)$ positiva. Embora possa haver ressonâncias para algumas dessas trajetórias (z_1, w_1) , a perturbação permanece limitada. Como veremos na Figura 6.2, na seção de Poincaré observamos toros KAM “intactos” nesse intervalo, com $E - E_1$ definida como positiva para $\cos z_1 > 0$.

Por outro lado, quando a trajetórias (z_1, w_1) entra no domínio de $\cos z_1 < 0$, ou seja, no intervalo de $-\pi/2 < z_1 - \pi < \pi/2$, então a perturbação obedece a condição $\delta \ddot{z}_2 = -g(t)\delta z_2$ com uma função $g(t)$ negativa. Portanto, nesse intervalo a perturbação é amplificada e, conforme z_1 se aproxima de π , o sistema deixa o regime linear. Isso significa que, como $\cos z_2$ não está mais perto de 1, então, o movimento relativo (z_2, w_2) realimenta as variáveis “dominantes”. Tal processo gera caos facilmente e pode-se esperar que, em breve, a trajetória passará nas proximidades de $z_1 \approx \pi$, ou seja, do ponto hiperbólico. Esse comportamento caótico para trajetórias pertencentes à banda com $\cos z_1 < 0$, já é esperado, uma vez que a separatriz para o caso não-integrável $N = 2$, é caótica.

A trajetória (z_1, w_1) , que se aproxima de $w_1 = \sigma$, também tende a se comportar caoticamente, porque esta trajetória corresponde a $I = 0$, e neste caso o ângulo z_1 “salta” espontaneamente de π elucidando a reversão de sinal de ambos X e Y quando a onda passa pela amplitude nula. Então, largura da ressonância (ou canto do olho do gato, conforme relacionamos na seção 3.3) nas variáveis originais (x_r, p_r) repentinamente torna-se o seu centro e vice-versa. Esse processo é fortemente propício ao surgimento de caos [75, 97].

6.4 Análise das trajetórias regulares e caóticas na Seção de Poincaré

Nesta seção apresentamos análises numéricas computacionais utilizando a seção de Poincaré para visualizar o comportamento geral do sistema. As seções de Poincaré que calculamos para este caso, foram obtidas para diferentes superfícies com energia constante, onde por critério de análise, optamos por fixar o valor do momento total P e representar a dinâmica na seção, para diferentes valores de H . Os valores P e H correspondentes aparecem no topo de cada figura. É importante destacar que as condições iniciais consideradas são condicionadas a domínios específicos de H constante, conforme estabelecido na construção da seção de Poincaré para este caso.

O surgimento de caos na interação autoconsistente de duas partículas ($N = 2$) com uma onda ($M = 1$) já é esperado, uma vez que este é um sistema Hamiltoniano não integrável e, portanto, não há solução não trivial com uma onda propagante [98]. Além disso, é intuitivo pensar que, tipicamente, a dinâmica caótica deve surgir e ser mais intensa nas regiões próximas à separatriz do sistema. Em nosso caso, em particular, isso significa dizer que a emergência de trajetórias caóticas na seção avolumaria-se nas regiões vizinhas ao ponto fixo hiperbólico, que neste caso está localizado em $y_1 + y_2 = \pi$. Assim, se este cenário fosse o único correto, o movimento caótico deveria reduzir gradualmente conforme as trajetórias aproximassem do ponto fixo elíptico em $y_1 + y_2 = 0$.

6.4.1 Seção de Poincaré para $H \leq 0$

A análise a seguir mostra que o surgimento de caos no sistema com duas partículas não segue a expectativa mencionada acima. Ao analisar a dinâmica no regime de $H < 0$, observamos o surgimento de movimento caótico na vizinhança do ponto fixo elíptico. No regime de $H < 0$ esse comportamento caótico é atípico, para sistemas onda-partícula, uma vez que neste cenário ambas partículas a princípio deveriam oscilar (com baixa energia cinética) no potencial estável da onda que, por sua vez, possui alta amplitude.

Identificamos, então que para uma determinada superfície de energia constante, o sistema possui forte sensibilidade na condição inicial da velocidade relativa entre as partículas. Portanto, conforme aumentamos a diferença na velocidade relativa das partículas, a variação da amplitude do movimento total das partículas atua como uma perturbação adicional no sistema.

Na Figura 6.2, apresentamos algumas seções de Poincaré obtidas no regime de $H \leq 0$. Em linhas gerais, vemos que o movimento caótico inicia em $y_1 + y_2 = 0$ e permanece “confinado” entre $-\pi < y_1 + y_2 < \pi$. Nesse momento é importante enfatizarmos que, quanto maior o alcance da trajetória em $p_1 + p_2$ menor é a diferença na condição inicial da velocidade

relativa entre as partículas (em módulo) e, naturalmente, a recíproca também é satisfeita. Portanto, a perturbação (que está diretamente relacionada à diferença na condição inicial das velocidades das partículas) aumenta a partir da trajetória mais externa para a mais interna nas seções 6.2.

Para esclarecer melhor esse ponto tomemos como exemplo a seção 6.2(a). Nesse caso, a trajetória preta representa a evolução do sistema com o menor valor de perturbação, enquanto que a trajetória azul (que parece um ponto devido as escalas dos eixos) representa o maior valor de perturbação nesse domínio de $H = -4,7$.

A Figura 6.3 complementa a explicação acima, elucidando a evolução temporal da amplitude do movimento em $p_1 + p_2$. O primeiro gráfico de cada painel mostra a evolução de p_1 (linha azul) e p_2 (linha vermelha) e o segundo a evolução da amplitude total de $p_1 + p_2$. As cores das linhas que representam a evolução de $p_1 + p_2$ no segundo gráfico de cada painel correspondem as cores das trajetórias na seção 6.2. Os valores numéricos das condições iniciais de p_{01} e p_{02} , bem como a perturbação $\delta = \sqrt{2(E - E_1)}$ (Eq. 6.20) são disponibilizadas na parte superior de cada painel.

Quando a diferença na condição inicial da velocidade relativa das partículas é muito pequena ($p_1 \approx p_2$), ambas partículas se aglomeram no parte estável do potencial e movem-se juntas, de modo que a evolução assemelha-se ao caso $N = 1$. Aumentando a diferença de velocidade p_{01} e p_{02} , as partículas começam oscilar em anti-fase com centro de massa constante em relação à onda, conforme mostra a sequência nos painéis (superiores) de 6.3(a) a 6.3(b).

O aumento da amplitude do centro de massa no movimento das partículas indica que o movimento ganha posições em relação ao potencial, de forma que quando uma (ou ambas) partículas alcança posições maiores que $y_1 + y_2 = \pi$, então, eventualmente, a partícula escapa do potencial e executa um movimento, a princípio imprevisível, preenchendo a seção com pontos, aparentemente, desordenados. Esse movimento é representado nas seções 6.2(b) - 6.2(f) pelas trajetórias caóticas.

Nas seções 6.2(b) e 6.2(c) a trajetória semelhante a um “8” representam movimentos caóticos, ainda que fracamente. É importante destacar que tais trajetórias não correspondem ao ponto fixo hiperbólico das equações diferenciais, sendo ponto fixo hiperbólico apenas na seção de Poincaré.

A intensificação do movimento caótico mostrado, sequencialmente na Figura 6.2, indica que conforme aumenta-se a perturbação no sistema, as trajetórias caóticas executam uma excursão maior pelo espaço de fase. O “confinamento” do caos no intervalo $-\pi <$

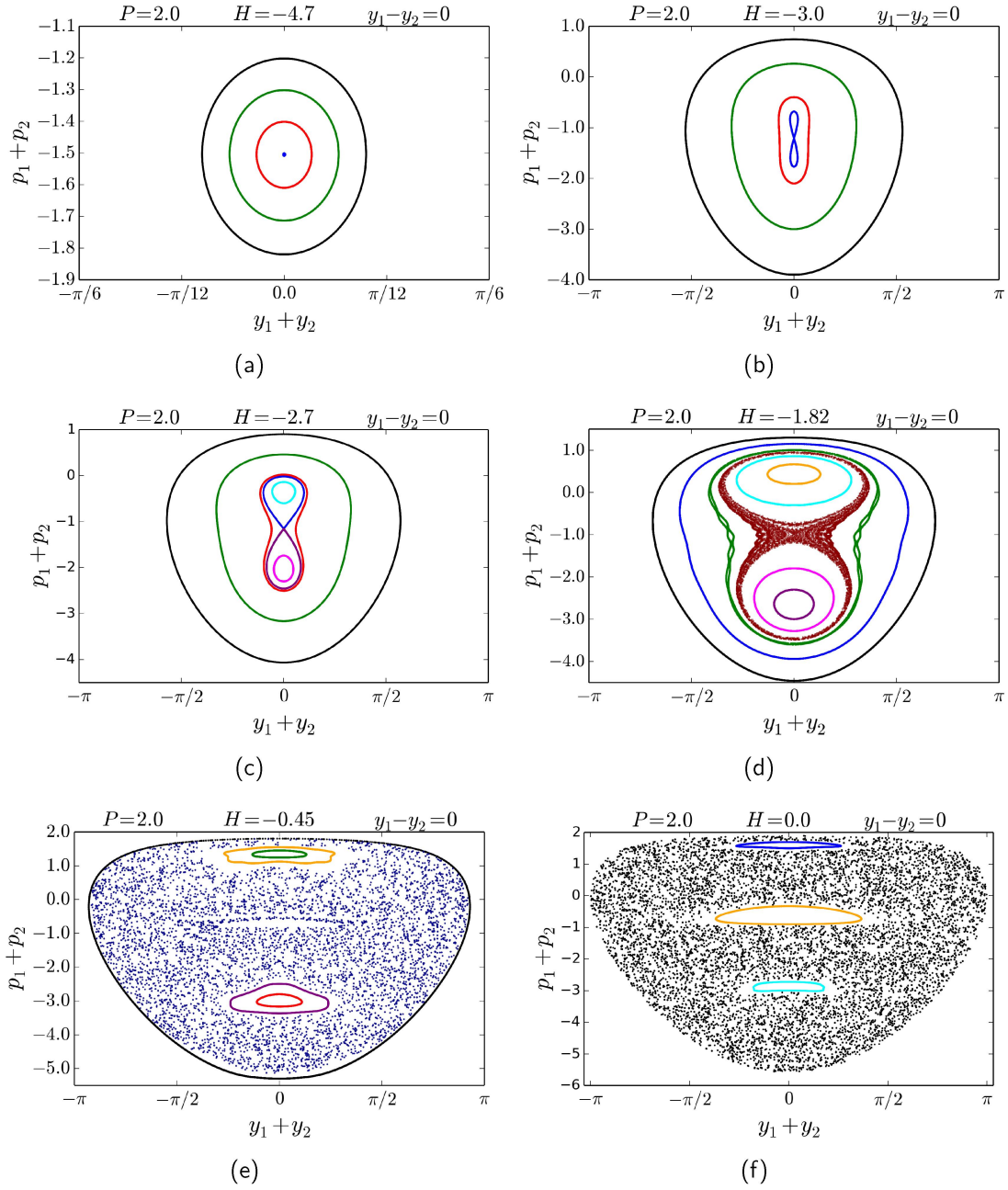


FIGURA 6.2 – Intercepção das trajetórias na seção Poincaré, localizada em $y_1 - y_2 = 0$, no regime de H negativo.

$y_1 + y_2 < \pi$, pode estar relacionado ao fato de que, quando uma (ou ambas) as partículas escapam do potencial ela (as) são facilmente recapturadas pelo potencial, uma vez que, nesse regime de energia ($H \leq 0$) a amplitude da onda é grande.

A Figura 6.4 mostra a transformada de Fourier da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ das trajetórias preta e azul da seção 6.2(a), respectivamente. A Figura 6.4(a), mostra que sistema onda-partícula oscila, harmonicamente, com um único pico de frequência. À medida

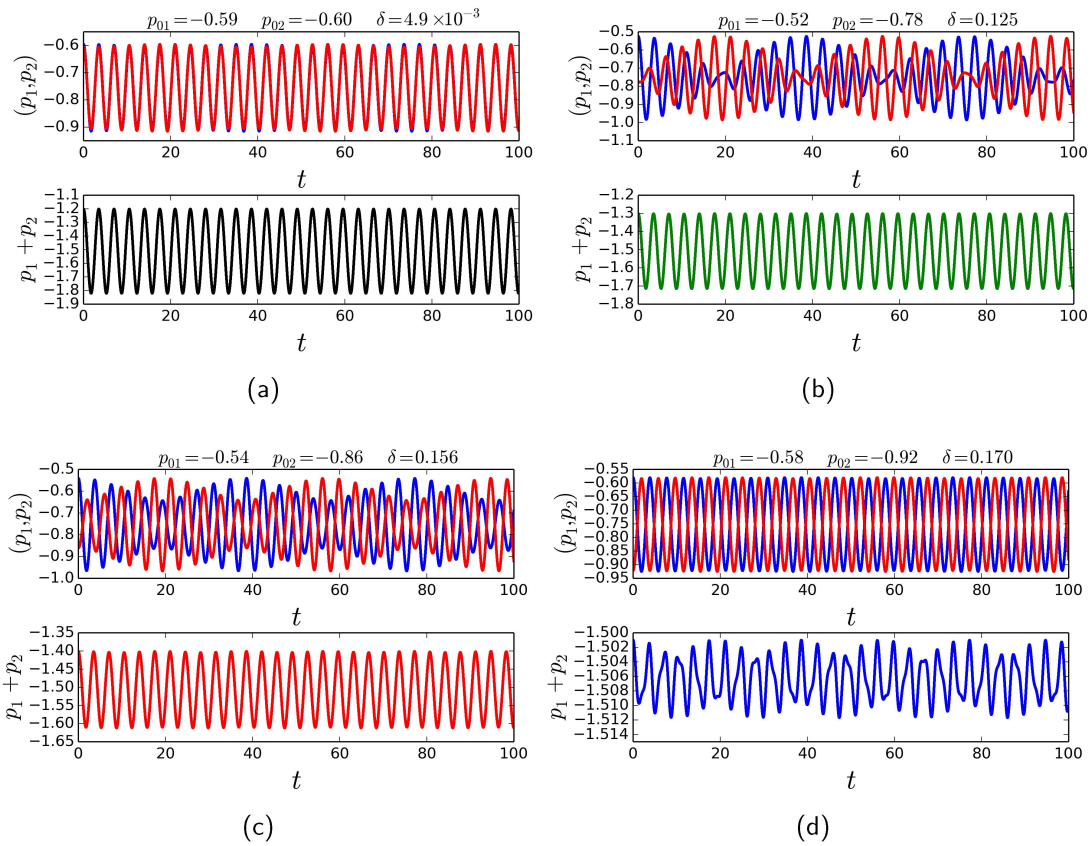


FIGURA 6.3 – A parte superior de cada painel mostra a evolução temporal da amplitude do movimento p_1 (linha azul) e p_2 (linha vermelha) e, a parte inferior a evolução da amplitude total de $p_1 + p_2$. (a) corresponde a evolução em tempo contínuo da trajetória preta na seção 6.2(a), (b) à trajetória verde, (c) a trajetória vermelha e (d) a trajetória azul. Note que a perturbação δ aumenta a partir da trajetória $\delta = 4,9 \times 10^{-3}$ para a trajetória azul $\delta = 0,170$.

que aumenta-se a perturbação, vemos uma frequência de ressonância, Figura 6.4(b) que, eventualmente, está associado à sobreposição e caos no sistema.

Na Figura 6.5 apresentamos análises via transformada de Fourier da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ para as condições iniciais que geram as trajetórias (caóticas) vermelha escura e azul nas seções 6.2(d) e 6.2(e), respectivamente. Note que o sinal obtido de movimento caótico (aperiódico) é ruidoso, no entanto, observamos que nesse regime com $H \leq 0$, o pico de frequência (e os harmônicos) são, consideravelmente, bem definidos.

Por fim, pode-se averiguar que a descrição da interação autoconsistente onda-partícula para o caso com $N = 2$ via dinâmica Hamiltoniana, mostrou-se uma ferramenta muito valiosa, em particular, na análise dos mecanismos que originam caos na vizinhança do ponto fixo elítico. Em concordância com o enunciado do Teorema **KAM**, nossos resultados mostram que a perturbação implica na deformação e destruição de trajetórias localizadas sobre

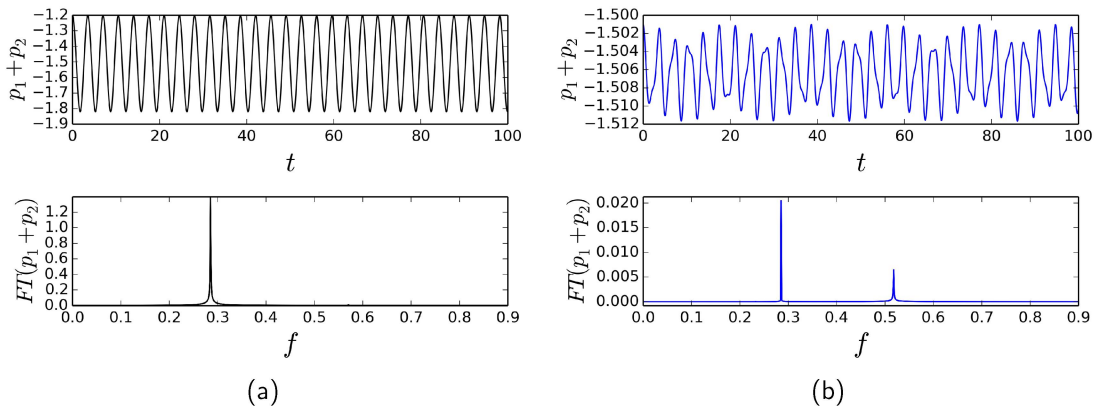


FIGURA 6.4 – Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram as trajetórias preta e azul na seção 6.2(a), respectivamente. Em (a) a transformada de Fourier mostra que o sistema oscila harmonicamente com um único pico de frequência; em (b) observamos o surgimento de um harmônico com o dobro da frequência fundamental, caracterizando o surgimento de uma ressonância no sistema.

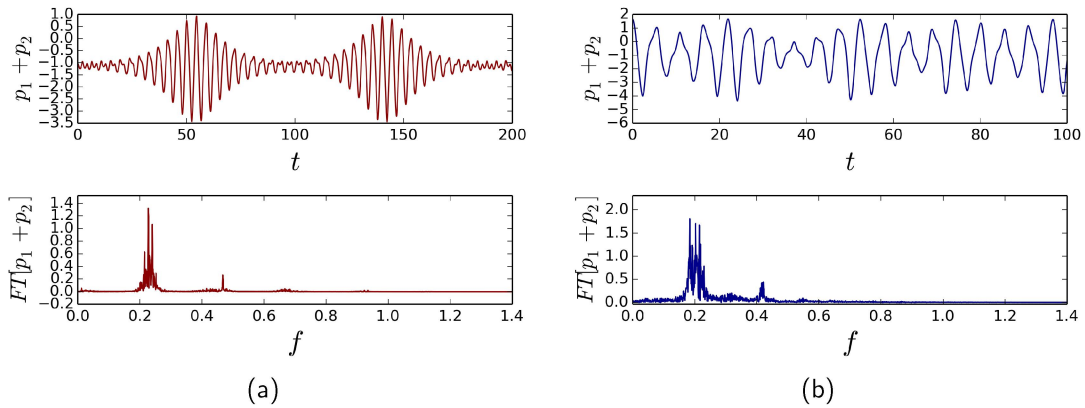


FIGURA 6.5 – Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram as trajetórias vermelha escura e azul nas seções 6.2(d) e 6.2(e), respectivamente. Observe que apesar da aparência “ruidosa” o pico de frequência ainda é, consideravelmente, bem definido.

toros invariantes determinados pelas constantes de movimento, tal que o espaço de fase seja caracterizado pela coexistência de trajetórias regulares e caóticas. Em adição, o *Teorema de Poincaré-Birkhoff* estabelece que, a quebra de um toro ressonante (devido à perturbação a que o sistema é submetido) dá origem a uma sequência de pontos que alteram-se entre elípticos (estáveis) e hiperbólicos (instáveis), onde os pontos elípticos tornam-se o centro de regiões estáveis, denominados *ilhas de ressonância* imersas no mar caótico, enquanto que, os pontos hiperbólicos são, naturalmente, propícios ao surgimento de caos.

6.4.2 Seção de Poincaré para $H > 0$

A Figura 6.6 mostra algumas seções de Poincaré para valores positivos de H . Nesse regime de energia, a atividade caótica já é esperada e está associada ao *caos de separatriz*. Em sistema Hamiltonianos não integráveis, na região assintótica à separatriz, as distâncias entre as ressonâncias são muito pequenas, de modo que, para pequenos valores de perturbação o sistema pode ser conduzido rapidamente para o regime caótico [53]. Assim para o caso com $N = 2$, isso significa que o sistema possui forte sensibilidade nas condições iniciais das velocidades das partículas, tal que pequenas variações na diferença de $p_1 + p_2$ no ponto fixo hiperbólico ($y_1 + y_2 = 2\pi$ na seção de Poincaré) a dinâmica torna-se celeremente caótica.

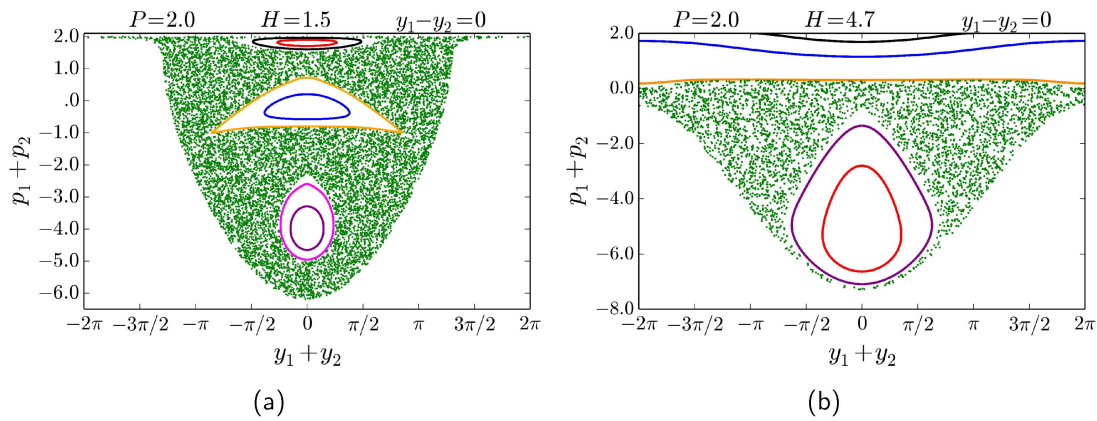


FIGURA 6.6 – Intercepção de trajetórias com a seção Poincaré localizada em $y_1 - y_2 = 0$ para valores de H positivo.

A seção 6.6 mostram ainda que mesmo imersas ao caos, no ponto fixo elíptico $y_1 + y_2 = 0$ sempre teremos a presença de trajetórias regulares fechadas (ilhas). Além disso, a topologia do espaço de fase do caso com $N = 2$ indica que o sistema apresenta diferentes tipos de movimentos, no qual, as ilhas regulares correspondem às partículas oscilando aprisionadas ao potencial estável da onda, as trajetórias abertas (Fig.6.6(b)) representam o movimento balístico, onde o sistema evolui sem troca de momento onda-partícula e o domínio caótico na região da separatriz, indica que quando uma (ou ambas) partículas atingem a posição instável no potencial ela(s) ganham energia suficiente da onda e pode(m) escapar do potencial, tal que sua trajetória pode realizar grandes excursões no espaço de fase. Certamente a partícula volta a interagir com a onda, mas nada se pode prever nessas circunstâncias.

A Figura 6.7 mostra a transformada de Fourier da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ para as condições iniciais que geram o movimento representado pela trajetória caótica verde na seção 6.6(b).

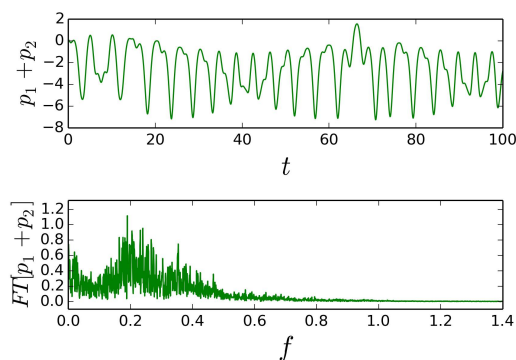


FIGURA 6.7 – Análise da evolução temporal da amplitude do movimento total $p_1 + p_2$ através da transformada de Fourier para as condições iniciais que geram a trajetória verde na seção 6.6(b)

Observe que o sinal obtido através da transformada de Fourier caracteriza-se como ruído irregular, de modo que não é possível evidenciar precisamente a frequência e harmônicos com a qual o sistema evolui.

CAPÍTULO 7 - Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, analisamos o comportamento regular e caótico na trajetória das partículas no espaço de fase, para sistemas onda-partícula em um plasma frio via dinâmica Hamiltoniana clássica [1, 29]. Objetivando realizar esse estudo em baixa dimensionalidade, consideramos a interação na aproximação de uma única onda [35, 36] e, então, o número de graus de liberdade no sistema é acrescido com o aumento do número de partículas ressonantes. Essa abordagem é amplamente utilizada no estudo de instabilidades em sistema feixe-plasma, no qual a declividade com derivada positiva na função de distribuição de velocidades do feixe significa um aumento do número de partículas que podem ressonar com a onda [15, 41].

Através de uma análise qualitativa e numérica computacional, revisitamos a dinâmica do caso integrável com uma partícula, $N = 1$ e descrevemos as mudanças topológicas no espaço de fases desse sistema, conforme variamos o momento linear total, P . Aumentando o número partículas ressonantes para $N = 2$, estudamos o surgimento e a intensificação de movimentos caóticos em baixa dimensão, tanto no regime de energia positivo quanto no regime de energia negativo [44].

A integrabilidade no caso com $N = 1$, assegura o comportamento regular das trajetórias no retrato de fase. Casos integráveis são importantes pois fornecem uma compreensão básica das estruturas coerentes encontradas em casos com muitas partículas ($N \gg 1$) [99]. Calculamos qualitativamente o valor específico do momento total, $P = 3/2$, para o qual o sistema passa por uma bifurcação, onde um par de pontos fixos com estabilidades diferentes, a saber, elíptico e hiperbólico coincidem na mesma abcissa do ponto fixo do sistema.

Elucidamos o comportamento geral no espaço de fase desse sistema através de diagramas de bifurcação, fornecendo assim, uma descrição clara da dinâmica em termos da intensidade da onda I e do momento total P (vide Figura 5.1). Obtivemos que para valores de $P < 3/2$ o espaço de fase possui trajetórias regulares fechadas na vizinhança do ponto fixo elíptico e trajetórias regulares abertas.

Após a bifurcação quando $P = 3/2$, a separatriz divide a topologia do retrato de fase em três domínios, onde em cada domínio a evolução do sistema é caracterizada pelo tipo de interação da onda com a partícula. As trajetórias fechadas, limitadas pela separatriz, a partir do ponto elíptico, sempre existem para qualquer valor do momento total P e, descrevem o movimento de aprisionamento da partícula pelo potencial para o caso em que a intensidade da onda é grande. Assim, conforme a energia cinética da partícula aumenta, ela ganha posições em relação ao potencial, tal que, quando a partícula atinge o ponto instável da onda a interação ocorre em escala temporal mais lenta.

A partir de $P > 3/2$, na abscissa do ponto hiperbólico, temos também a presença de ilhas fechadas. Essa região do retrato de fase, também corresponde ao movimento de aprisionamento da partícula pela onda, mas para casos específicos, no qual a amplitude do potencial é pequena, ou mais especificamente, para $I < 1/2$. Esse resultado identifica um domínio, limitado a uma certa quantidade de condições iniciais, para o qual é possível obter aceleração coerente da partícula mesmo com valores baixo de I .

Ainda para $N = 1$, calculamos um valor especial do momento linear total, a saber, $P = 3/4^{1/3}$, para o qual, a trajetória que contém $I = 0$ passa, assintoticamente, pelo ponto fixo hiperbólico e coincide com a separatriz, caracterizando uma bifurcação global no sistema. As trajetórias abertas que, também aparecem par qualquer valor de P , representam o movimento de partícula livre (balístico), ou seja, quando a onda e a partícula evoluem sem interação efetiva.

Para $N = 2$, identificamos e analisamos a aparência do caos em um sistema de baixa dimensão. Nesse cenário, a discussão sobre a emergência de caos foi dividida em duas regiões do espaço de fase, a saber: próximo do ponto fixo elíptico e hiperbólico. O aparecimento e intensificação do caos na região próxima ao ponto fixo hiperbólico é tipicamente esperado, uma vez que para $N = 2$ o sistema Hamiltoniano é não integrável, e o emaranhado homoclínico gerado a partir de uma separatriz em um sistema hamiltoniano não integrável é um emaranhado perto do qual o transporte caótico se desenvolve [53]. Por outro lado, para sistemas onda-partícula, o aparecimento e intensificação de caos próximo ao ponto fixo elíptico não é normalmente esperado.

O surgimento de caos na vizinhança do ponto fixo elíptico ocorre no regime de energia negativa. Nesse cenário como $H \leq 0$ o momento, p , associado as partículas é baixo, enquanto a intensidade da onda I é grande, dado que o momento linear total P e a energia total H são quantidades conservadas na dinâmica. Isso implica que, a princípio, as partículas deveriam oscilar aprisionadas no “poço” estável do potencial. Naturalmente, o movimento caótico nesse sistema está associado ao escape de partículas. Em oposição ao que era esperado, mostramos que com o aumento da perturbação algumas trajetórias regulares são deformadas devido a sobreposição de ressonância e a quebra das trajetórias ressonantes dá origem a trajetórias caóticas na seção Poincaré.

No regime de $H > 0$, o surgimento e intensificação do caos é esperado na região próxima ao ponto fixo hiperbólico por onde passa a separatriz. Em sistemas Hamiltonianos não integráveis a separatriz possui uma certa “largura” caótica, tal que nessa região o movimento caótico é conhecido como *caos de separatriz* [53]. Nossos resultados mostram ainda que, para ambos os regimes de H , positivo ou negativo, o caso com $N = 2$ apresenta forte sensibilidade

na condição inicial da velocidade relativa das partículas. Assim, pequenas variações em $p_1 + p_2$ podem conduzir o sistema rapidamente para o regime caótico.

Em síntese, a descrição da interação onda-partícula na aproximação de baixa dimensão via dinâmica Hamiltoniana clássica mostrou-se fundamentalmente eficaz na investigação dos mecanismos relacionados ao surgimento e intensificação do caos para $N = 2$. O tratamento qualitativo das equações, bem como, a definição da seção de Poincaré para o caso com $N = 2$, que realizamos neste trabalho, compete como uma contribuição inaugural na análise desse tipo de sistema, torna-se, assim, uma base fundamental para estudos futuros.

Como perspectivas futuras deste trabalho pretendemos estender as análises para o caso com $N = 2$ na investigação da transição para o regime caótico. Ainda em baixa dimensionalidade, ou seja, para poucos graus de liberdade como o caso com $N = 2$, a transição do regime regular para o caótico pode, em princípio, apresentar estruturas fractais no espaço de fase, uma vez que as trajetórias das partículas escapam para regiões bem definidas do espaço de fase. Assim, é possível definir uma bacia de escape¹ e quantificar a fractalidade através da dimensão da fronteira da bacia [100, 101]. Além disso, esse tipo de análise pode ser estendido para sistemas com $N \gg 1$.

Casos nos quais aumenta-se o número de partículas ressonantes, mesmo na aproximação de uma única onda, podem apresentar uma maior influência da difusão de Arnold no espaço de fase. No entanto, esses sistemas não são previstos por teorias bem consolidadas, como o teorema KAM, por exemplo. Assim, o estudo de sistemas com $N \gg 1$ deve abordar um caminho, primordialmente, via análises numéricas computacionais. A investigação com $N \gg 1$ é substancial na descrição das instabilidades feixe-plasma que, ocasionalmente, podem gerar as chamadas turbulências de Langmuir.

¹A bacia de escape é formada por uma região do espaço de fase definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam, ou deixam, determinada região do espaço de fase.

REFERÊNCIAS

- [1] ESCANDE, D. F.; ELSKENS, Y. Microscopic dynamics of plasmas and chaos: the wave-particle interaction paradigm. **Plasma Physics and Control Fusion**, v. 45, p. A115–124, 2003. 19, 26, 98
- [2] SWANSON, D. G. **Plasma kinetic theory**. Boca Raton: CRC Press, 2008. 19
- [3] STIX, T. H. **Waves in plasmas**. New York: Springer-Verlag, 1992. 19, 21
- [4] BITTENCOURT, J. A. **Fundamentals of Plasma Physics**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. 9, 19, 20, 21, 22, 24, 54, 55, 56
- [5] CHEN, F. F. **Introduction to plasma physics and controlled fusion**. New York: Plenum Press, 1984. 19, 20, 22, 24, 55
- [6] GOLAZARI, S. S.; KHALILY, M.; ENTEZAMI, F.; XIAO, P. Performance analysis of the loop-shaped plasma antenna under different pressure conditions. In: IEEE. **2018 International Symposium on Networks, Computers and Communications (ISNCC)**. Rome, Italy, 2018. p. 1–4. 9, 20
- [7] ICHIMARU, S. **Statistical Plasma Physics, Vol.I: Basic Principles**. Boca Raton: CRC Press, 2018. 21
- [8] ELSKENS, Y. Irreversible behaviours in Vlasov equation and many-body Hamiltonian dynamics: Landau damping, chaos and granularity. In: PASSOT, T.; SULEM, C.; SULEM, P. L. (Ed.). **Topics in Kinetic Theory (Toronto, 24.03-02.04.2004)**. Providence (RI): Am. Math. Soc., 2005. p. 89–108. 21, 68
- [9] JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. USA: American Association of Physics Teachers, 1999. 21, 67
- [10] HERR, W. Introduction to Landau damping. **arXiv preprint arXiv:1601.05227**, 2016. 9, 21, 22
- [11] HE, Z.-H.; HOU, B.; LEBAILLY, V.; NEES, J. A.; KRUSHELNICK, K.; THOMAS, A. Coherent control of plasma dynamics. **Nature communications**, v. 6, p. 1–7, 2015. 21
- [12] RAU, B.; TAJIMA, T.; HOJO, H. Coherent electron acceleration by subcycle laser pulses. **Physical review letters**, v. 78, p. 3310, 1997. 21

- [13] ARTEMYEV, A. V.; NEISHTADT, A. I.; VAINCHTEIN, D. L.; VASILIEV, A. A.; VASKO, I. Y.; ZELENYI, L. M. Trapping (capture) into resonance and scattering on resonance: Summary of results for space plasma systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 65, p. 111–160, 2018. 21
- [14] LEONEL, E. D.; KUWANA, C. M.; YOSHIDA, M.; OLIVEIRA, J. Chaotic diffusion for particles moving in a time dependent potential well. **Physics Letters A**, v. 384, p. 126737, 2020. 21
- [15] HASEGAWA, A. **Plasma Instabilities and Nonlinear Effects**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. 21, 22, 23, 24, 26, 98
- [16] YOON, P. H.; RHEE, T.; RYU, C.-M. Self-consistent generation of superthermal electrons by beam-plasma interaction. **Physical Review Letters**, APS, v. 95, n. 21, 2005. 21
- [17] LI, Y.; KRINSKY, S.; LEWELLEN, J. W.; KIM, K.-J.; SAJAEV, V.; MILTON, S. V. Characterization of a chaotic optical field using a high-gain, self-amplified Free-Electron Laser. **Physical review letters**, v. 91, p. 243602, 2003. 21
- [18] DOVEIL, F.; MACOR, A.; AÏSSI, A. Observation of Hamiltonian chaos and its control in wave-particle interaction. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, v. 49, p. B125, 2007. 21
- [19] KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W.; GROSS, R. A. **Principles of Plasma Physics**. USA: American Association of Physics Teachers, 1973. 22, 23
- [20] LANDAU, L. D. On the vibrations of the electronic plasma. **Yad. Fiz.**, v. 10, p. 25, 1946. 23
- [21] DAWSON, J. On Landau damping. **The physics of fluids**, v. 4, p. 869–874, 1961. 23
- [22] MALMBERG, J. H.; WHARTON, C. B. Collisionless damping of electrostatic plasma waves. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 184, 1964. 23
- [23] TSURUTANI, B. T.; LAKHINA, G. S. Some basic concepts of wave-particle interactions in collisionless plasmas. **Reviews of Geophysics**, v. 35, p. 491–501, 1997. 9, 10, 24, 25
- [24] VEDENOV, A. A.; VELIKHOV, E. P.; SAGDEEV, R. Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma. **Nuclear Fusion**, v. 1, p. 82, 1961. 26
- [25] DRUMMOND, W. E.; PINES, D. Non-linear stability of plasma oscillations. **Nuclear Fusion**, v. 3, p. 1049–1057, 1962. 26

- [26] ROBERSON, C.; GENTLE, K. W. Experimental test of the quasilinear theory of the gentle bump instability. **The Physics of Fluids**, v. 14, p. 2462–2469, 1971. 26
- [27] ELSKENS, Y.; ESCANDE, D. F.; DOVEIL, F. Vlasov equation and N -body dynamics : How central is particle dynamics to our understanding of plasmas ? **Eur. Phys. J. D**, v. 68, p. 1–7, 2014. 26
- [28] MYNICK, H. E.; KAUFMAN, A. N. Soluble theory of nonlinear beam-plasma interaction. **Phys. Fluids**, v. 21, p. 653–663, 1978. 26, 70
- [29] ELSKENS, Y.; ESCANDE, D. **Microscopic dynamics of plasmas and chaos**. Bristol: IoP Publishing, 2003. 26, 27, 54, 63, 66, 68, 98
- [30] KARNEY, C. F. F.; BERS, A. Stochastic ion heating by a perpendicularly propagating electrostatic wave. **Physical Review Letters**, v. 39, p. 550–554, 1977. 26
- [31] SMITH, G. R.; PEREIRA, N. Phase-locked particle motion in a large-amplitude plasma wave. **Phys. Fluids**, v. 21, p. 2253–2262, 1978. 26
- [32] ESCANDE, D. F. Stochasticity in classical Hamiltonian systems: universal aspects. **Phys. Rep.**, v. 121, p. 165–261, 1985. 26
- [33] SOUSA, M. C.; STEFFENS, F. M.; PAKTER, R.; RIZZATO, F. B. Standard map in magnetized relativistic systems: fixed points and regular acceleration. **Physics Review E**, v. 82, p. 026402, 2010. 26
- [34] ICHIKAWA, Y. H.; KAMIMURA, T.; KARNEY, C. F. F. Stochastic motion of particles in tandem mirror devices. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 6, p. 233 – 240, 1983. 26
- [35] ONISHCHENKO, I. N.; LINETSKII, A. R.; MATSIBORKO, N. G.; SHAPIRO, V. D.; SHEVCHENKO, V. I. Contribution to the nonlinear theory of excitation of a monochromatic plasma wave by an electron beam. **Soviet Phys. JETP**, v. 11, p. 281–285, 1971. 26, 27, 71, 72, 98
- [36] O'NEIL, T. M.; WINFREY, J. H.; MALMBERG, J. H. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma. **Phys. Fluids**, v. 14, p. 1204–1212, 1971. 26, 27, 70, 71, 72, 98
- [37] DOVEIL, F.; MACOR, A. Wave-particle interaction and Hamiltonian dynamics investigated in a Traveling Wave Tube. **Physics of plasmas**, v. 13, p. 055704, 2006. 27
- [38] FIRPO, M.-C.; ELSKENS, Y. Kinetic limit of N -body description of wave-particle self-consistent interaction. **Journal of statistical physics**, v. 93, p. 193–209, 1998. 27

- [39] ESCANDE, D. F.; ZEKRI, S.; ELSKENS, Y. Intuitive and rigorous derivation of spontaneous emission and Landau damping of Langmuir waves through classical mechanics. **Physics of Plasmas**, v. 3, p. 3534–3539, 1996. 27
- [40] CARY, J. R.; DOXAS, I. An explicit symplectic integration scheme for plasma simulations. **Journal of Computational Physics**, v. 107, p. 98–104, 1993. 27
- [41] TENNYSON, J. L.; MEISS, J. D.; MORRISON, P. J. Self-consistent chaos in the beam-plasma instability. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 71, p. 1–17, 1994. 27, 98
- [42] DOVEIL, F.; FIRPO, M.-C.; ELSKENS, Y.; GUYOMARC'H, D.; POLENI, M.; BERTRAND, P. Trapping oscillations, discrete particle effects and kinetic theory of collisionless plasma. **Physics Letters A**, v. 284, p. 279–285, 2001. 27
- [43] DOVEIL, F.; MACOR, A.; AUHMANI, K. Wave-particle interaction investigated in a Travelling Wave Tube. **Plasma physics and controlled fusion**, v. 47, p. A261, 2005. 27
- [44] GOMES, J. V.; SOUSA, M. C.; VIANA, R. L.; CALDAS, I. L.; ELSKENS, Y. Low-dimensional chaos in the single wave model for self-consistent wave-particle Hamiltonian. **Chaos**, doi: 10.1063/5.0040939, v. 31, 2021. 27, 28, 98
- [45] LOWENSTEIN, J. H. **Essentials of Hamiltonian dynamics**. New York: Cambridge University Press, 2012. 27, 30, 84
- [46] TRESCHÉV, D. Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems. **Nonlinearity**, v. 17, n. 5, p. 1803, 2004. 27
- [47] BOLSINOV, A. V.; BORISOV, A. V.; MAMAEV, I. S. Topology and stability of integrable systems. **Russian Mathematical Surveys**, v. 65, n. 2, p. 259–318, 2010. 27
- [48] LEGA, E.; GUZZO, M.; FROESCHLÉ, C. Detection of Arnold diffusion in Hamiltonian systems. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 182, n. 3-4, p. 179–187, 2003. 27
- [49] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. 28, 30
- [50] HAIRER, E.; LUBICH, C.; WANNER, G. **Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations**. Berlin: Springer, 2006. 28
- [51] ZASLAVSKY, G. M. **Hamiltonian chaos and fractional dynamics**. New York: Oxford University Press, 2005. 28
- [52] STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**. Philadelphia USA: Westview Press, 2015. 30, 47, 83

- [53] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and stochastic motion**. New York: Springer, 1983. 30, 47, 82, 83, 96, 99
- [54] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. 10, 30, 38, 40, 44, 46, 48
- [55] SPIVAK, M. **Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus**. Boca Raton, FL: CRC press, 2018. 31
- [56] GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Boston: Addison-Wesley, 1980. 34
- [57] OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. New York: Cambridge university press, 1993. 10, 40, 47, 52, 53, 82, 83
- [58] CALDAS, I. L. **Sistemas Nao Lineares (Conservativos)**. 2020. Acessado em 22/06/2021. Disponível em: <https://portal.if.usp.br/controle/sites/portal.if.usp.br.ifusp/files/2.%20Sistemas%20N%C3%A3o%20Lineares.pdf>. 10, 41
- [59] KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. **Dokl. Akad. Nauk**, v. 98, p. 527–530, 1954. 47
- [60] ARNOL'D, V. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. **Russ. Math. Surv.**, v. 18, p. 85–191, 1963. 47
- [61] MÖSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. **Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II**, p. 1–20, 1962. 47
- [62] VOCKS, C.; MANN, G. Generation of suprathermal electrons by resonant wave-particle interaction in the solar corona and wind. **The Astrophysical Journal**, v. 593, n. 2, p. 1134, 2003. 54
- [63] KOCH, R. Wave-particle interactions in plasmas. **Plasma physics and controlled fusion**, v. 48, n. 12B, p. B329, 2006. 54
- [64] SHKLYAR, D. R. On the nature of particle energization via resonant wave-particle interaction in the inhomogeneous magnetospheric plasma. **Annales Geophysicae**, v. 29, n. 6, p. 1179–1188, 2011. 54
- [65] SHUKLA, P.; RAO, N.; YU, M.; TSINTSADZE, N. Relativistic nonlinear effects in plasmas. **Physics Reports**, v. 138, n. 1-2, p. 1–149, 1986. 54
- [66] LAWSON, J. Lasers and accelerators. **IEEE Transactions on Nuclear Science**, v. 26, n. 3, p. 4217–4219, 1979. 54

- [67] ANTONIAZZI, A.; NINNO, G. D.; FANELLI, D.; GUARINO, A.; RUFFO, S. Wave-particle interaction: from plasma physics to the Free-Electron-Laser. In: . [S.l.: s.n.], 2005. v. 7, n. 1, p. 012. 54
- [68] HE, J.; WANG, L.; TU, C.; MARSCH, E.; ZONG, Q. Evidence of Landau and cyclotron resonance between protons and kinetic waves in solar wind turbulence. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 800, p. L31, 2015. 54
- [69] HELANDER, P.; LISAK, M. The stochastic nature of ion-cyclotron-resonance wave-particle interaction in tokamaks. **Physics of Fluids B: Plasma Physics**, v. 4, p. 1927–1934, 1992. 54
- [70] MENG, G.; GORELENKOV, N. N.; DUARTE, V. N.; BERK, H. L.; WHITE, R. B.; WANG, X. Resonance frequency broadening of wave-particle interaction in tokamaks due to Alfvénic eigenmode. **Nuclear Fusion**, v. 58, n. 8, p. 082017, 2018. 54
- [71] GURNETT, D. A.; BHATTACHARJEE, A. **Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications**. United Kingdom: Cambridge university press, 2005. 55
- [72] KALLENRODE, M.-B. **Space Physics: an Introduction to Plasmas and Particles in the Heliosphere and Magnetospheres**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. 57
- [73] GRASSO, D.; PEGORARO, F.; PORCELLI, F.; CALIFANO, F. Hamiltonian magnetic reconnection. **Plasma physics and controlled fusion**, v. 41, n. 12, p. 1497, 1999. 64
- [74] CRAWFORD, J. D.; JAYARAMAN, A. First principles justification of a “single wave model” for electrostatic instabilities. **Phys. Plasmas**, v. 6, p. 666–673, 1999. 71
- [75] CASTILLO-NEGRETTE, D. del; FIRPO, M.-C. Coherent structures and self-consistent transport in a mean field Hamiltonian model. **Chaos**, v. 12, p. 496–507, 2002. 71, 80, 86, 90
- [76] FARINA, D.; CASAGRANDE, F.; COLOMBO, U.; POZZOLI, R. Hamiltonian analysis of the transition to the high-gain regime in a Compton free-electron-laser amplifier. **Physics Review E**, v. 49, p. 1603–1609, 1994. 71
- [77] ADAM, J. C.; LAVAL, G.; MENDONÇA, I. Time-dependent nonlinear Langmuir waves. **Phys. Fluids**, v. 24, p. 260–267, 1981. 72, 76
- [78] CASTILLO-NEGRETTE, D. del. Dynamics and self-consistent chaos in a mean field Hamiltonian model. In: DAUXOIS, T.; RUFFO, S.; ARIMONDO, E.; WILKENS, M. (Ed.). **Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions (les Houches, 18-22.02.2002)**. Berlin: Springer, 2002. p. 407–436. 72, 86

- [79] TENNYSON, J. L.; MEISS, J. D.; MORRISON, P. J. Self-consistent chaos in the beam-plasma instability. **Physica D**, v. 71, p. 1–17, 1994. 72
- [80] ANTONIAZZI, A.; ELSKENS, Y.; FANELLI, D.; RUFFO, S. Statistical mechanics and Vlasov equation allow for a simplified Hamiltonian description of single-pass free electron laser saturated dynamics. **Eur. Phys. J. B**, v. 50, p. 603–611, 2006. 72
- [81] BOLSINOV, A. V.; BORISOV, A. V.; MAMAIEV, I. S. Topology and stability of integrable systems. **Russian Mathematical Surveys**, v. 65, p. 259–318, 2010. 77
- [82] LASKAR, J. Large scale chaos and marginal stability in the solar system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 64, n. 1, p. 115–162, 1996. 82
- [83] ELLNER, S.; GALLANT, A. R.; THEILER, J. Detecting nonlinearity and chaos in epidemic data. **Epidemic models: their structure and relation to data**, p. 229–247, 1995. 82
- [84] COSTANTINO, R. F.; DESHARNAIS, R.; CUSHING, J. M.; DENNIS, B. Chaotic dynamics in an insect population. **Science**, v. 275, n. 5298, p. 389–391, 1997. 82
- [85] WEISS, J. N.; GARFINKEL, A.; SPANO, M. L.; DITTO, W. L. et al. Chaos and chaos control in biology. **The Journal of clinical investigation**, v. 93, n. 4, p. 1355–1360, 1994. 82
- [86] MATHIAS, A. C.; VIANA, R. L.; KROETZ, T.; CALDAS, I. L. Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 469, p. 681–694, 2017. 82
- [87] VIANA, R. L.; LOPES, S. R.; SZEZECH, J. D.; CALDAS, I. L. Synchronization of chaos and the transition to wave turbulence. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 22, n. 10, p. 1250234, 2012. 82
- [88] DETTMANN, C. P.; COHEN, E. G. D. Microscopic chaos and diffusion. **Journal of Statistical Physics**, v. 101, n. 3, p. 775–817, 2000. 82
- [89] CASTILLO-NEGRETE, D. del. Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems. **Physics of Plasmas**, v. 7, n. 5, p. 1702–1711, 2000. 82
- [90] VIANA, R. L.; MATHIAS, A. C.; MARCUS, F. A.; KROETZ, T.; CALDAS, I. L. Fractal boundaries in chaotic Hamiltonian systems. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012002, 2017. 82
- [91] STEPHEN T. THORNTON. JERRY, B. M. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo, BR: CENGAGE, 2018. 82, 83

- [92] BARROW-GREEN, J. **Poincaré and the three body problem**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc., 1997. 83
- [93] CHENCINER, A. Poincaré and the three-body problem. In: **Henri Poincaré, 1912-2012**. New York: Springer, 2015. p. 51–149. 83
- [94] SZEZECH, J. D. **Dinâmica não linear do modelo da interação de quatro ondas conservativa**. Tese (Doutorado), 2004. 11, 84
- [95] WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. New York: Springer Science & Business Media, 2003. 84
- [96] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. Cintra do. **Caos: uma introdução**. Editora Edgard Blücher LTDA, 1994. 84, 85
- [97] MENYUK, C. R. Particle motion in the field of a modulated wave. **Physics Review A**, v. 31, p. 3282–3290, 1985. 90
- [98] ELSKENS, Y. Finite- N dynamics admit no travelling-waves solutions for the Hamiltonian XY model and single-wave collisionless plasma model. In: EDP SCIENCES. **ESAIM: Proceedings**. [S.l.], 2001. v. 10, p. 221–215. 91
- [99] PAKTER, R.; CORSO, G. Improving regular acceleration in the nonlinear interaction of particles and waves. **Phys. Plasmas**, v. 2, p. 4312–4324, 1995. 98
- [100] MATHIAS, A. C.; MUGNAINE, M.; SANTOS, M. S.; SZEZECH, J. D.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L. Fractal structures in the parameter space of nontwist area-preserving maps. **Physical Review E**, APS, v. 100, p. 052207, 2019. 100
- [101] VIANA, R. L.; CALDAS, I. L.; SZEZECH, J. D.; BATISTA, A. M.; ABUD, C. V.; SCHELIN, A. B.; MUGNAINE, M.; SANTOS, M. S.; LEAL, B. B.; BARTOLONI, B. et al. Transport barriers in symplectic maps. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, p. 1–11, 2021. 100